

ÉLÉMENT DE PORTFOLIO 04



Publication

1 DÉFINITION DE CET ÉLÉMENT

Titre de l'élément : A double oracle approach to minmax regret optimization problems with interval data, Hugo Gilbert, Olivier Spanjaard, publié dans EJOR en 2017.

Fichier de élément : decision4.pdf

2 MOTIVATIONS DU CHOIX DE CET ÉLÉMENT

Cet article est typique des travaux que nous menons en théorie de la décision algorithmique. Ils visent à exploiter des modèles connus de la théorie de la décision pour l'optimisation combinatoire en présence de données incertaines ou imprécises. L'algorithmique proposée pour la résolution exploite une "vision théorie des jeux" du problème et souligne les synergies entre la théorie de la décision, la théorie des jeux, l'optimisation combinatoire et bien sûr la programmation linéaire.

Dans la terminologie de la programmation mathématique, l'approche proposée peut être vue comme mêlant génération de variables et de contraintes pour résoudre un programme linéaire de dimension exponentielle dans la taille des données d'entrée.

Néanmoins, la vision théorie des jeux que nous avons développée ne requiert aucune connaissance préalable de ces techniques, et l'approche peut donc être appréhendée plus simplement par des communautés potentiellement moins familières avec les outils de la recherche opérationnelle, comme par exemple les chercheuses et chercheurs en intelligence artificielle.

L'approche est particulièrement générale et peut ainsi être utilisée dans de multiples problèmes d'optimisation combinatoire robuste où l'on dispose d'un algorithme efficace pour résoudre la version nominale (i.e., sans incertitude) du problème.

3 PRÉSENTATION DE CET ÉLÉMENT

Ce travail s'inscrit dans une direction de recherche plus large que nous avons commencé à explorer à l'occasion de la thèse d'Hugo Gilbert (aujourd'hui maître de conférences au LAMSADE, à l'Université Paris-Dauphine). Il s'agit d'étudier l'emploi de méthodes de type maître-esclaves, également dites à *base d'oracles*, pour l'optimisation de critères non-linéaires de décision. Ces méthodes permettent de résoudre des problèmes de grande taille en procédant de manière incrémentale.

Parmi ces méthodes à base d'oracles figure en particulier l'algorithme de double oracle proposé par McMahan et al. [4], qui permet de déterminer efficacement un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu à deux joueurs à somme nulle comportant un espace combinatoire de stratégies pour chacun des joueurs. Disposant de cet algorithme, nous nous sommes intéressés à exploiter une "vision théorie des jeux" pour l'optimisation du critère de regret minimax (de Savage) dans des problèmes d'optimisation robuste avec données intervalles [2]. Nous avons également développé une approche similaire dans une autre publication, pour l'optimisation du critère SSB (*Skew Symmetric Bilinear Utility* [1]) dans des problèmes de décision séquentielle dans le risque [3].

Cette modélisation consiste à aborder les problèmes d'optimisation minimax en les reformulant comme un jeu à deux joueurs, puis à rechercher un équilibre de Nash en stratégies mixtes de ce jeu. Par exemple, en optimisation combinatoire robuste, où l'on doit choisir une solution réalisable en présence de plusieurs scénarios (possiblement une infinité) sur les paramètres de la fonction objectif, l'ensemble des stratégies du premier joueur correspond à l'ensemble des solutions réalisables du problème étudié, et l'ensemble des stratégies du second joueur correspond à l'ensemble des scénarios possibles sur la fonction objectif (ce second joueur représente la nature). Le jeu à deux joueurs ainsi défini est de grande taille car l'ensemble des stratégies de chaque joueur est défini en compréhension.

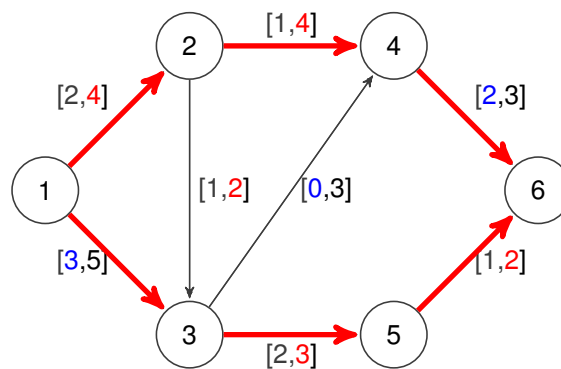


FIGURE 1 – Une stratégie mixte de 1 à 6 pour le joueur chemin, avec une probabilité 1/2 sur chaque chemin, et une meilleure réponse du joueur nature (en couleurs) pour le critère du regret maximum.

Concevoir un algorithme de double oracle pour un problème particulier consiste à spécifier des oracles, c'est-à-dire les procédures de détermination d'une meilleure réponse pour chacun des joueurs à une stratégie mixte de l'adversaire (voir figure 1 pour une illustration sur le problème de plus court chemin robuste). Grâce à ces oracles, la méthode explicite de manière incrémentale un sous-jeu réduit du jeu à deux joueurs de grande taille. Une fois que la méthode a convergé, une solution randomisée du problème est retournée, ce qui correspond à une distribution de probabilité sur des solutions réalisables. Ce type de solutions fait particulièrement sens si le problème est répété. Cette situation se présente par exemple dans le cas d'un trajet répété quotidiennement, dont la recherche peut être modélisée comme un problème de plus court chemin robuste avec valuations intervalles sur les arcs du graphe. L'identification d'une solution randomisée optimale est d'autant plus utile que sa valeur fournit une borne inférieure de la valeur optimale d'une solution déterministe, ce qui permet de développer des procédures de *branch and bound* si une solution déterministe est recherchée.

Nous avons implanté et testé ce type d'algorithmes pour le problème de plus court chemin robuste avec données intervalles. Les tests ont été menés sur des données synthétiques et sur des données issues du monde réel (villes de New-York et de San Francisco, comportant des centaines de milliers de sommets et d'arcs). Ils ont montré que ces algorithmes sont particulièrement efficaces lorsque certaines solutions sont dominantes par rapport à d'autres, car l'algorithme converge alors très rapidement.

Comme mentionné plus haut, l'approche présentée dans cette publication est très générale et peut donc être spécifiée pour *tout* problème d'optimisation combinatoire robuste avec données intervalles, dès lors que l'on dispose d'un algorithme efficace pour la version nominale du problème. Plus largement, des approches de même type peuvent certainement être développées pour l'optimisation d'autres critères minmax dans des problèmes de décision avec un espace combinatoire de solutions potentielles (comme cela a été fait par exemple pour des problèmes de décision séquentielle dans le risque [3]).

4 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Peter C Fishburn. Nontransitive measurable utility. *Journal of Mathematical Psychology*, 26(1) :31–67, 1982.
- [2] Hugo Gilbert and Olivier Spanjaard. A double oracle approach to minmax regret optimization problems with interval data. *European Journal of Operational Research*, 2017.
- [3] Hugo Gilbert and Olivier Spanjaard. Complexity of Solving Decision Trees with Skew-Symmetric Bilinear Utility. In *Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-2017)*, Sydney, Australia, August 2017.
- [4] H Brendan McMahan, Geoffrey J Gordon, and Avrim Blum. Planning in the presence of cost functions controlled by an adversary. In *Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning (ICML-03)*, pages 536–543, 2003.