Soit A un tableau de longueur n (ses indices sont dans l'intervale $[1..n]$) On a une fonction `rechmin` telle que si $i \leq n$ et $\texttt{rechmin}(A, i, n) = k$ alors $\forall j \in [i..n], A[k] \leq A[j]$.

Soit l'algorithme

Pour i de 1 à n faire
  $k \leftarrow \texttt{rechmin}(A, i, n)$;
  Si $i \neq k$ alors échanger $A[i]$ et $A[k]$;
Fpour

On veut montrer que cet algorithme trie le tableau A, c'est à dire qu'en fin de calcul on a :

$$P(A, n) \ ::= \forall j_1, j_2 \in [1..n], j_1 \leq j_2 \Rightarrow A[j_1] \leq A[j_2]$$

Pour cela, on posons $Q(A, i) \ ::= \forall j_1 \in [1..i], \forall j_2 \in [i..n] A[j_1] \leq A[j_2]$
et l'invariant : $I(A, i) \ ::= P(A, i) \wedge Q(A, i)$
En décorant notre code avec les assertions, il faut établir :

Pour i de 1 à n faire
  $k \leftarrow \texttt{rechmin}(A, i, n)$;
  Si $i \neq k$ alors échanger $A[i]$ et $A[k]$; $\{I(A, i)\}$
Fpour $\{P(A, i)\}$

Montrons que l'invariant est conservé tout au long de l'exécution de la boucle. Appelons a la valeur de la variable i. On raisonne par induction sur $a \geq 1$.

(1) Si $a = 1$ (ie : au premier passage dans la boucle), il faut montrer $I(A, 1)$, c'est à dire $P(A, 1) \wedge Q(A, 1)$, c'est à dire $(\forall j_1, j_2 \in [1..1], j_1 \leq j_2 \Rightarrow A[j_1] \leq A[j_2]) \wedge (\forall j \in [1..1], A[j] \leq A[1])$
Ce qui est vrai car $A[1] \leq A[1]$

(2) Supposons que pour $i = a$ on a $I(A, i)$, c'est à dire $I(A, a)$ et montrons que pour $i = a + 1$ on a toujours $I(A, i)$, c'est à dire $I(A, a + 1)$. On procéde en deux temps : *(a)* on montre $Q(A, a + 1)$ puis *(b)* on montre $P(A, a + 1)$.

(a) On veut $\forall j_1 \in [1..a + 1], \forall j_2, \in [a + 1..n] A[j_1] \leq A[j_2]$
Par hypothèse de récurrence, on a $\forall j_1 \in [1..a], \forall j_2, \in [a..n], A[j_1] \leq A[j_2]$
Puisque k est le résultat de $\texttt{rechmin}(a+1, n)$, en appelant b la valeur de $A[k]$ on a que $\forall j_2 \in [a+1..n], b \leq A[j_2]$ avec $k \in [a + 1..n]$, aprés exécution de la première instruction. On raisonne alors par cas suivant le résultat du test $a + 1 \neq k$.

Si $a + 1 \neq k$, on a procédé à l'échange donc la valeur présente en $A[a + 1]$ est b.

Sinon, comme $k = a + 1$, on a encore $A[a + 1] = b$.

Dans les deux cas, on a $\forall j_2 \in [a + 1..n], A[a + 1] \leq A[j_2]$
De plus, comme on a, par hypothèse de récurence, en prenant $j_2 = k$ $\forall j_1 \in [1..a], A[j_1] \leq b$
ce qui nous donne $\forall j_1 \in [1..a], A[j_1] \leq A[a + 1]$
En recollant ensemble les morceaux, on a bien ce que l'on voulait.

(b) On veut $\forall j_1, j_2 \in [1..a + 1], j_1 \leq j_2 \Rightarrow A[j_1] \leq A[j_2]$
Par hypothése de récurence, on a $\forall j_1, j_2 \in [1..a], j_1 \leq j_2 \Rightarrow A[j_1] \leq A[j_2]$
On a montré en (a) que $\forall j_1 \in [1..a], A[j_1] \leq A[a + 1]$
On a donc bien ce que l'on veut.

En sortie de boucle, i vaut n, l'invariant nous donne donc, en particulier : $P(A, n)$.