1 Calcul des propositions

1.1 Syntaxe

Soit $\mathcal{V}_0$ un ensemble infini (dénombrable) de variables dites *propositionnelles*. On notera p, p_1, p_2,.. ,q, q_1, etc ... On considère les symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ appelés *connecteurs* du calcul des propositions. On se donne également les parenthèses ouvrante et fermante. On définit (inductivement) l'ensemble $\mathcal{F}_0$ des *formules* du calcul des proposition, que l'on appellera plus simplement ensemble des *propositions*. On notera A, A_1,.. , B, B_1, etc ... les propositions. L'ensemble $\mathcal{F}_0$ des propositions est *le plus ensemble* tel que :

1. toute variable propositionnelle est une proposition.
2. si A est une proposition alors $(\neg A)$ est une proposition.
3. si A et B sont des propositions alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \Rightarrow B)$ sont des propositions.

Cette définition inductive permet à la fois de savoir que toute proposition est ou bien une variable propositionnelle, ou bien de la forme $(\neg A)$, ou bien de l'une des formes $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ ou $(A \Rightarrow B)$; ainsi que de raisonner par induction sur les propositions pour démontrer leurs propiétés générales. Par exemple, on peut montrer que

Exercice (1) : pour toute proposition A, son nombre de parenthèses ouvrantes est égal à son nombre de parenthèses fermantes.

Preuve: Notons $o(A)$ le nombre de parenthèses ouvrante de A et $f(A)$ son nombre de parenthèses fermantes.Montrons, par induction sur A, que $o(A) = f(A)$:

1. si A est une variable propositionnelle alors $o(A) = 0 = f(A)$.
2. si $A = (\neg B)$, par hypothèse d'induction, on a $o(B) = f(B)$, d'où $o(A) = 1+o(B) = 1+f(B) = f(A)$.
3. les derniers cas sont laissés en exercice.

CQFD

On peut également raisonner sur les propriétés des propositions en se ramenant à une induction plus usuelle sur les entiers en définissant, par exemple, la *complexité* d'une proposition que l'on note $c(A)$ et que l'on définit comme fonction récursive :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c(p) & = & 0, \text{ pour tout } p \in \mathcal{V}_0 \\ c(A \wedge B) & = & c(A) + c(B) + 1 \\ c(A \vee B) & = & c(A) + c(B) + 1 \\ c(A \Rightarrow B) & = & c(A) + c(B) + 1 \end{array} \right.$$

On s'autorisera désormais n'utiliser les parenthèses que pour lever les risques d'ambiguïté de lecture.

1.2 Sémantique

Pour l'instant, le ≪calcul des propositions≫ est un langage purement abstrait : si le choix des symboles est guidé par la tradition, rien ne nous aurait empêché d'en faire un autre. Donner une sémantique à ce langage est donner un *sens* ou une *interprétation* de ses constructions syntaxiques.

Intuitivement, une proposition sera *vrai* ou *fausse*. La vérité ou la fausseté d'une proposition sera fonction de celle des ses constituants, en accord avec le sens que l'on accorde aux connecteurs.
Pour formaliser cette intuition, on se donne un ensemble de deux *valeurs de vérité* notées $\mathsf{1}$ et $\mathsf{0}$ (pour, respectivement *vrai* et *faux*) On appelle *distribution de valeur de vérité* (ou, plus simplement, *distribution*) toute application de $\mathcal{V}_0$ dans $\{\mathsf{1}, \mathsf{0}\}$. Les distributions de valeur de vérité nous donne une interprétation des variables propositionnelles. Si δ est une distribution, on peut l'étendre en une application $\bar{\delta} : \mathcal{F}_0 \to \{\mathsf{1}, \mathsf{0}\}$ telle que, pour toute variable p, toutes propositions A et B :

1. $\bar{\delta}(p) = \delta(p)$.
2. $\bar{\delta}(\neg A) = \mathsf{1}$ si et seulement si $\bar{\delta}(A) = \mathsf{0}$.

3. $\bar{\delta}(A \wedge B) = 1$ si et seulement si $\bar{\delta}(A) = \bar{\delta}(B) = 1$.
4. $\bar{\delta}(A \vee B) = 0$ si et seulement si $\bar{\delta}(A) = \bar{\delta}(B) = 0$.
5. $\bar{\delta}(A \Rightarrow B) = 0$ si et seulement si $\bar{\delta}(A) = 1$ et $\bar{\delta}(B) = 0$.

On obtient l'extension des distributions à l'ensemble des formules en interprétants chacun des connecteurs par des fonctions booléennes. L'interprétation de $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ sont d'usage courrant en programmation, celle de $\Rightarrow$ l'est moins. Nous rappelons la définition de ces fonctions en donnant leur *tables de vérité* respectives[1] :

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

On dira qu'une distribution δ *vérifie* une proposition A si et seulement si $\bar{\delta}(A) = 1$.

On dira qu'une proposition A est *valide* si et seulement si il existe une distribution δ qui vérifie A.

On dira qu'une proposition A est une *tautologie* si et seulement si toute distribution δ vérifie A.

On dira qu'une proposition A est une *antilogie* si et seulement si aucune distribution δ ne vérifie A.

1.3 Conséquence sémantique

Lorsqu'une proposition est une tautologie, on a coutume de dire qu'elle est ≪vraie≫ A l'inverse, on pourra dire des antilogies que ce sont des propositions ≪fausses≫ Entre ces deux extrèmes, il est des propositions qui ne sont ni ≪vraies≫ ni ≪fausses≫ au sens simpliste que nous venons d'évoquer : ce sont les propositions *simplement valides*. Par exemple, si $p, q \in \mathcal{V}_0$, la proposition $p \vee q$ sera ≪vraie≫ pour la distribution δ_1 telle que $\delta_1(p) = 1$, mais sera fausse si l'on considère la distribution δ_2 telle que $\delta_2(p) = \delta_2(q) = 0$. Ainsi, la notion intuitive de vérité n'a pas le caractère absolu que laisserait entendre une phrase comme : ≪toute proposition est vraie ou fausse≫ La vérité ou la fausseté d'une proposition n'a, en général, de sens que par rapport aux distributions possibles; les philosophes diraient ≪*les mondes possibles*≫

En généralisant notre exemple de proposition simplement valide, on remarque que pour tout $A, B \in \mathcal{F}_0$ si A est vérifiée alors $A \vee B$ l'est aussi. On dit alors que $A \vee B$ est une *conséquence sémantique* de A. En généralisant encore, on formalise la notion de conséquence sémantique par la définition suivante :

> soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_0$ et $B \in \mathcal{F}_0$, on dit que B est une conséquence sémantique (ou, plus simplement, une conséquence) de $\mathcal{A}$ si et seulement si pour toute distribution δ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, si $\bar{\delta}(A) = 1$ alors $\bar{\delta}(B) = 1$.

On notera $\mathcal{A} \models B$. Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble fini $\{A_1, .., A_n\}$, on écrira $A_1, .., A_n \models B$. Plutôt que $\mathcal{A} \cup \{A\} \models B$, on écrira, plus simplement $\mathcal{A}, A \models B$. Les tautologies étant des propositions vérifiées par toute distribution, on pourra écrire, si A est une tautologie : $\models A$.

EXERCICE (2) : Montrer que $\mathcal{A}, A \models B$ si et seulement si $\mathcal{A}, \models A \Rightarrow B$.

1.4 Preuves formelles

En fixant de manière rigoureuse la syntaxe du langage des propositions, nous nous sommes donné le moyen de reconnaître sans ambiguïté si une suite de symboles est une proposition ou non. De plus, cette définition formelle nous a permis de définir précisément la notion de conséquence logique : la conséquence sémantique. Cependant, pour répondre à la question : ≪la proposition B est-elle une conséquence des propositions $A_1, .., A_n$? ≫ ; en d'autres termes, pour démontrer que B est (ou n'est pas) une conséquence des propositions $A_1, .., A_n$, nous utilisons encore la langue naturelle – même si nous en restreignons l'usage à celui, rigoureux, qu'en font les mathématiciens.

[1] par abus, nous noterons de la même façon les connecteurs et les fonctions booléennes correspondantes

La notion de *preuve formelle* que nous abordons dans ce paragraphe est aux démonstrations ce que les propositions sont aux énoncés usuels des mathématiques.

L'objet d'une preuve est d'établir qu'une proposition, ou qu'un ensemble de propositions est une conséquence d'un ensemble (éventuellement vide) de propositions. Pour suivre la tradition, nous noterons plutôt Γ, Γ_1, .., Δ, Δ_1, etc... les ensembles de propositions. Nous noterons : Γ_1, Γ_2 pour $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$; Γ, A ou A, Γ pour $\Gamma \cup \{A\}$; et encore $A_1, .., A_n$ pour $\{A_1, .., A_n\}$.
Afin de bien marquer la différence entre les *preuves sémantiques* qui utilisent l'interprétation présentée au paragraphe précédent et les preuves formelles qui font l'objet du présent paragraphe, nous utiliserons, en place du symbole $\models$, le symbole $\vdash$. Nous appelons *séquent* une expression de la forme $\Gamma \vdash \Delta$. Les ensembles des formules sont vraiment des ensembles : ils ne contiennent pas de redondance et les formules n'y sont pas ordonnées (l'ensemble noté Γ, A, A est le même que l'ensemble noté Γ, A; l'ensemble noté Γ, A est le même que l'ensemble noté A, Γ) On parle d'*hypothèses* à propos des formules à gauche du symbole $\vdash$ et de *conclusions* à propos de celles de droite.

Un système formel de preuves est donné par un ensemble de *règles* notées

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \;\; \dots \;\; \Gamma_n \vdash \Delta_n}{\Gamma \vdash \Delta}\, {\scriptstyle R}$$

En général, n vaut 0, 1 ou 2. On appelle *règle axiome* une règle pour laquelle $n = 0$. On note dans ce cas

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta}\, {\scriptstyle R}$$

Le R à droite de la barre est le nom de la règle utilisée. Intuitivement, la règle se lit comme ≪*si on a* $\Gamma_1 \vdash A_1$ *et ...* $\Gamma_n \vdash A_n$ *alors on a* $\Gamma \vdash A$≫, ou encore, ≪*pour avoir* $\Gamma \vdash A$, *il faut avoir* $\Gamma_1 \vdash A_1$ *et ...* $\Gamma_n \vdash A_n$. Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est appelé *séquent conclusion* de la règle et les séquents $\Delta_1 \; \dots \; \Gamma_n \vdash \Delta_n$ sont les *prémisses* de la règle.

Une preuve ou *dérivation* formelle d'un séquent est un arbre construit à l'aide de l'ensemble des règles et dont chaque feuille est un séquent issu d'une règle axiome. Une preuve est donc un objet syntaxique au même titre qu'une proposition. A l'aide des règles, nous pourrons construire des arbres dont les feuilles ne sont pas toutes des règles axiomes, nous parlerons alors de *dérivations incomplètes*. En cas d'ambiguïté possible nous parlerons de *dérivation complète* pour préciser que toutes les feuilles sont effectivement des axiomes.

Si π est une dérivation (possiblement incomplète) d'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$, nous noterons $\begin{array}{c}\pi \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}$

1.4.1 La déduction naturelle

Voici un premier système formel de preuves. On a coutume de diviser ses règles en deux catégories : des règles d'*introduction* de connecteurs et des règles d'*élimination*.
Nous présentons la déduction naturelle sous forme de règles manipulant des séquents bien qu'en fait, il s'agisse d'un système de dérivation de formules. C'est pourquoi, dans notre présentation, nos séquents n'auront qu'une seule formule en conclusion.

Axiome
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\, {\scriptstyle Ax}$

Négation	
Intro	Elim
$\dfrac{\Gamma, A \vdash \neg B \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \neg A}\, {\scriptstyle \neg_i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg B \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A}\, {\scriptstyle \neg_e}$

CONJONCTION		
Intro	Elim (gche)	Elim (drte)
$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge_{eg}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge_{ed}$

DISJONCTION		
Intro (gche)	Intro (drte)	Elim
$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_{ig}$	$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_{id}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\vee_e$

IMPLICATION	
Intro	Elim
$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow_e$

ABSURDITÉ (CLASSIQUE)
$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}Abs$

1.4.2 Le calcul des séquents

Voici un second sytème formel qui, lui, manipule réellement des séquents. S'il paraît moins ≪naturel≫, il est, en revanche, plus maléable pour la théorie de la preuve formelle ainsi que la recherche automatique de preuves (formelles).
Ses règles sont, à une exception prés, des règles d'introductions que l'on divise en règles *gauches* et règles *droites*.

AXIOME
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}Ax$

COUPURE
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}Cut$

NÉGATION	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\neg_g$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\neg_d$

Conjonction	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_g$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_d$

Disjonction	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta_1}\ \vee_d$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_g$

Implication	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow_d$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_g$

1.4.3 L'axiome

On dira qu'un ensemble de propositions est *atomique* s'il ne contient que des variables propositionnelles. Par extension, un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est atomique si et seulement si Γ et Δ sont atomiques. Si seul Γ est atomique, on dira que $\Gamma \vdash \Delta$ est *atomique à gauche* et si seul Δ est atomique, on dira que $\Gamma \vdash \Delta$ est *atomique à droite*.
Un dérivation (possiblement incomplète) π est dite *maximale* si et seulement si toutes ses feuilles sont atomiques.

On dira, enfin, qu'une règle axiome $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta}\ {\scriptstyle Ax}$ est *atomique* si et seulement si $\Gamma \vdash \Delta$ atomique.

Nous nous proposons de montrer le résultat suivant

Théorème (1) : si un séquent est dérivable alors il en existe une dérivation maximale.

Montrons, dans un premier temps, que

Lemme (1) : pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$, il existe une dérivation π (possiblement incomplète) de $\Gamma \vdash \Delta$ dont toutes les feuilles sont atomiques à gauche.

On appelle *complexité* d'un ensemble de propositions Γ la somme des complexités des propositions qu'il contient. On note $c(\Gamma)$.

Preuve: on montre, par induction sur $c(\Gamma)$ l'existence de π.

- si $c(\Gamma) = 0$ alors $\Gamma = \emptyset$ et le résultat est trivial.
- supposons que $c(\Gamma) = n > 0$ et que (c'est notre hypothèse d'induction) pour tout ensemble Γ' tel que $c(\Gamma') < c(\Gamma)$ et pour tout Δ, il existe une dérivation (possiblement incomplète) π' de $\Gamma' \vdash \Delta$ dont toutes les feuilles sont atomiques à gauche.
  Soit $A \in \Gamma$ telle que $c(\Gamma) = c(A)$. On peut poser $\Gamma = A, \Gamma''$. On montre alors, selon la forme de A, que l'on peut construire π pour $\Gamma \vdash \Delta$.
  1. on peut exclure le cas $A \in \mathcal{V}_0$ car on a supposé $c(A) > 0$.
  2. si $A = \neg B$, on construit la dérivation incomplète

$$\dfrac{\Gamma'' \vdash \Delta, B}{\Gamma'', \neg B \vdash \Delta}\ \neg_g$$

on a $c(\Gamma'') < c(\Gamma'', \neg B)$, on a donc, par hypothèse d'induction, une dérivation π' de $\Gamma'' \vdash \Delta, B$ dont toutes les feuilles sont atomiques à gauche. On pose alors

$$\pi = \left\{ \begin{array}{c} \pi' \\ \vdots \\ \dfrac{\Gamma'' \vdash \Delta, B}{\Gamma'', \neg B \vdash \Delta}\ \neg_g \end{array} \right.$$

3. si $A = B \wedge C$, on construit

$$\dfrac{B, C, \Gamma'' \vdash \Delta}{B \wedge C, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \wedge_g$$

on a $c(B, C, \Gamma'') < c(B \wedge C, \Gamma'')$, ce qui nous donne π' par hypothèse d'induction et

$$\pi = \left\{ \begin{array}{c} \pi' \\ \vdots \\ \dfrac{B, C, \Gamma'' \vdash \Delta}{B \wedge C, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \wedge_g \end{array} \right.$$

4. si $A = B \vee C$, on construit

$$\dfrac{B, \Gamma'' \vdash \Delta \qquad C, \Gamma'' \vdash \Delta}{B \vee C, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \vee_g$$

on a, par hypothèse d'induction π'_1 dérivation de $B, \Gamma'' \vdash \Delta$ et π'_2 dérivation de $C, \Gamma'' \vdash \Delta$. On pose

$$\pi = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c} \pi'_1 \\ \vdots \\ B, \Gamma'' \vdash \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \pi'_2 \\ \vdots \\ C, \Gamma'' \vdash \Delta \end{array}}{B \vee C, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \vee_g \right.$$

5. si $A = B \Rightarrow C$, on construit

$$\dfrac{\Gamma'' \vdash \Delta, B \qquad \Gamma'', C \vdash \Delta}{\Gamma'', B \Rightarrow C \vdash \Delta}\ \Rightarrow_g$$

on a, par hypothèse d'induction π'_1 dérivation de $\Gamma'' \vdash \Delta, B$ et π'_2 dérivation de $\Gamma'', C \vdash \Delta$. On pose

$$\pi = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c} \pi'_1 \\ \vdots \\ \Gamma'' \vdash \Delta, B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \pi'_2 \\ \vdots \\ \Gamma'', C \vdash \Delta \end{array}}{\Gamma'', B \Rightarrow C \vdash \Delta}\ \Rightarrow_g \right.$$

CQFDOn montre, dans un second temps, que

LEMME (2) : pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$ il existe une dérivation (possiblement incomplète) π de $\Gamma \vdash \Delta$ dont toutes les feuilles sont atomiques à droite.

Nous laissons la preuve en exercice.

Des deux lemmes (1) et (2), il est aisé de conclure que

LEMME (3) : pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$ il existe une dérivation (possiblement incomplète) maximale de $\Gamma \vdash \Delta$.

PREUVE:

En appliquant lemme (1) on obtient un arbre de dérivation dont toutes les feuilles sont des séquents atomiques à gauche. On peut alors prolonger chacune de ces feuilles par application du lemme (2) CQFD

Montrons à présent que

LEMME (4) : pour tout Γ et pour tout Δ, on peut construire une dérivation π de $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ dont toute feuille est un axiome de la forme $\Gamma', p \vdash p, \Delta'$ où $p \in \mathcal{V}_0$

PREUVE: Par induction sur A :

1. si $A \in \mathcal{V}_0$, le résultat est immédiat.
2. si $A = A_1 \wedge A_2$, on peut construire la dérivation incomplète

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A_1 \vdash A_1, \Delta \qquad \Gamma, A_2 \vdash A_2, \Delta}{\Gamma, A_1, A_2 \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta}\wedge_d}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta}\wedge_g$$

par hypothèse d'induction, il existe une dérivation π_1 de $\Gamma, A_1 \vdash A_1, \Delta$ et une dérivation π_2 de $\Gamma, A_2 \vdash A_2, \Delta$ dont les feuilles sont de la forme $\Gamma', p \vdash p, \Delta'$ avec $p \in \mathcal{V}_0$. On pose alors

$$\pi = \left\{ \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots \\ \Gamma, A_1 \vdash A_1, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots \\ \Gamma, A_2 \vdash A_2, \Delta\end{array}}{\Gamma, A_1, A_2 \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta}\wedge_d}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta}\wedge_g \right.$$

Les autres cas sont laissés en exercices.

PREUVE (du théorème (1)) : si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable, par le lemme (4), il est possible de prolonger chacune de ses feuilles (qui sont des axiomes) en une dérivation dont toutes les feuilles sont des axiomes de la forme $\Gamma', p \vdash p, \Delta'$. En appliquant à chacune de ces feuilles le lemme (3) on obtient une dérivation maximale de $\Gamma \vdash \Delta$. CQFD

1.5 Correction et complétude

Nous allons dans ce paragraphe démontrer deux résultat importants concernant l'un de nos deux systèmes de preuves formelles : le calcul des séquents[2] Ces résultats concernent l'adéquation entre la notion de conséquence sémantique et celle de dérivabilité formelle. Par exemple, nous voulons nous assurer que si une proposition A est dérivable sans hypothèses (*ie* : $\vdash A$ alors c'est une tautologie (*ie* : $\models A$) et, à l'inverse, nous voulons que pour toute tautologie A, il existe une dérivation de A (*ie* : du séquent $\vdash A$). La première exigence est celle de la *correction* du système formel : on ne peut dériver que du vrai. La seconde est une exigence de *complétude* : tout ce qui est vrai est dérivable.

Correction Pour reformuler formellement nos exigences, il nous allons interpréter nos séquents en regard de la notion de conséquence. Ce qui nous donnera une notion de *validité* d'un séquent.

> Le séquent $A_1, .., An \vdash B_1, .., B_m$ est dit *valide* si et seulement si toute distribution δ qui vérifie chacune des $A_1, .., An$, vérifie au moins l'une des $B_1, .., B_m$

Si Γ est l'ensemble $A_1, .., An$, notons $\bigwedge \Gamma$ la proposition $A_1 \wedge .. \wedge A_n$ et $\bigvee \Gamma$ la proposition $A_1 \vee .. \vee A_n$. Notre définition est équilavente à

> le séquent $A_1, .., An \vdash B_1, .., B_m$ est valide si et seulement si toute distribution qui vérifie $\bigwedge \Gamma$ vérifie également $\bigvee \Delta$.

Il est également équivalent de dire que

> le séquent $A_1, .., An \vdash B_1, .., B_m$ est valide si et seulement si $\models A_1 \wedge .. \wedge An \Rightarrow B_1 \vee .. \vee B_m$

EXERCICE (3) : Montrer cette dernière équivalence (indication : on peut utiliser le résultat de l'exercice (2))

Nous utiliserons, à discrétion l'une ou l'autre de ces variantes.

Nous allons maintenant montrer que chacune de nos règles est correcte en ce sens que la validité des prémisses entraîne celle de la conclusion. Par abus de langage, si Γ est l'ensemble $A_1, .., A_n$ et si $v \in \{1, 0\}$, nous noterons $\bar{\delta}(\Gamma) = v$, pour $\bar{\delta}(A_1) = .. = \bar{\delta}(A_n) = v$.

[2] Ces résultats sont, bien entendu, transposables à la déduction naturelle, mais nous n'en verrons pas les preuves ici.

Ax Le séquent $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ est bien valide car si toute distribution δ vérifie chacune des formules de Γ, A, elle vérifie, en particulier A et donc au moins une formule de A, Δ.

Cut En raisonnant par l'absurde, supposons que $\Gamma \vdash \Delta, A$ et $A, \Gamma \vdash \Delta$ sont valides et que $\Gamma \vdash \Delta$ ne le soit pas.

On a alors une distribution δ telle que $\bar{\delta}(\Gamma) = 1$ et $\bar{\delta}(\Delta) = 0$. Par hypothèse de validité de $\Gamma \vdash \Delta, A$ il faut que δ vérifie au moins une formule de Δ, A. Comme $\bar{\delta}(\Delta) = 0$, on a nécessairement que $\bar{\delta}(A) = 1$. Dés lors $\bar{\delta}(A, \Gamma) = 1$ et, par hypothèse de validité de $A, \Gamma \vdash \Delta$ on obtient que $\bar{\delta}(\Delta) = 1$. On a donc quà la fois $\bar{\delta}(\Delta) = 0$ et $\bar{\delta}(\Delta) = 1$ ce qui constitue la contradiction recherchée.

$\neg_g$ Supposons valide $\Gamma \vdash \Delta, A$. Parmi toutes les distributions qui vérifient Γ, pour montrer la validité de $\Gamma, \neg A \vdash \Delta$, nous n'avons besoin de considérer les distributions δ telles que $\bar{\delta}(A) = 0$. Dés lors, puisque $\Gamma \vdash \Delta, A$ est valide, on a $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$.

les preuves des cas $\neg_d$, $\wedge_g$, $\wedge_d$, $\vee_g$ et $\vee_d$ sont laisées en exercice.

$\Rightarrow_g$ supposons les séquents $\Gamma \vdash \Delta, A$ et $\Gamma, B \vdash \Delta$ valides. Supposons une distribution δ telle que $\bar{\delta}(\Gamma, A \Rightarrow B) = 1$. On a, en particulier $\bar{\delta}(\Gamma) = 1$ et $\bar{\delta}(A \Rightarrow B) = 1$. On raisonne alors pas cas sur $\bar{\delta}(A)$ pour monter que $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$:

- si $\bar{\delta}(A) = 0$, par hypothèse de validité de $\Gamma \vdash \Delta, A$, on a $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$;
- si $\bar{\delta}(A) = 1$ il faut alors (pour que $\bar{\delta}(A \Rightarrow B) = 1$) que $\bar{\delta}(B) = 1$ et par hypothèse de validité de $\Gamma, B \vdash \Delta$ on a bien $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$.

$\Rightarrow_d$ supposons valide le séquent $\Gamma, A \vdash \Delta, B$, supposons δ telle que $\bar{\delta}(\Gamma) = 1$ et montrons, par cas sur $\bar{\delta}(A)$ et $\bar{\delta}(B)$ que $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee A \Rightarrow B) = 1$:

- si $\bar{\delta}(A) = 1$ alors, par hypothèse de validité de $\Gamma, A \vdash \Delta, B$, on a $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee B) = 1$,
  - si $\bar{\delta}(B) = 1$ alors $\bar{\delta}(A \Rightarrow B) = 1$ et donc $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee A \Rightarrow B) = 1$,
  - si si $\bar{\delta}(B) = 0$, par hypothèse de validité de $\Gamma, A \vdash \Delta, B$, on a $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$ et donc $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee A \Rightarrow B) = 1$;
- si $\bar{\delta}(A) = 0$ alors, par définition, $\bar{\delta}(A \Rightarrow B) = 1$ et donc $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee A \Rightarrow B) = 1$.

Puisque chacune de nos règles est correcte, on en déduit par induction sur la formation des dérivations, la correction du calcul des séquents. A savoir que

Théorème (2) : si $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$.

Complétude Montrons, dans un premier temps que

Lemme (5) : si π est une dérivation (incomplète) de $\Gamma \vdash \Delta$ dont une des feuilles, disons $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$, est atomique telle que $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$ alors il existe une distribution δ telle que $\bar{\delta}(\bigwedge \Gamma) = 1$ et $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 0$.

Preuve: par induction sur π

1. si $\pi = \left\{ \dfrac{}{\Gamma_0 \vdash \Delta_0}\, Ax \right.$, il suffit de poser $\delta(p) = 1$ pour tout $p \in \Gamma_0$ et $\delta(q) = 1$ pour tout $q \in \Delta_0$. Ce que l'on peut faire puisque $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$.
2. $$\pi = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots \\ \Gamma \vdash \Delta, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots \\ A, \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta}\, Cut \right.$$
   si $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ est une feuille de π alors : ou bien c'est une feuiile de π_1; ou bien c'est une feuille de π_2.
   - si $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ est une feuille de π_1, par hypothèse de récurrence, il existe δ telle que $\bar{\delta}(\bigwedge \Gamma) = 1$ et $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee A) = 0$. On a donc, en particulier, $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 0$.
   - la cas où $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ est une feuille de π_2 se traite de façon analogue.
3. $$\pi = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots \\ \Gamma, A_1, A_2 \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash \Delta}\, \wedge_g \right.$$

Par hypothèse d'induction, on a δ telle que $\bar{\delta}(\bigwedge \Gamma \wedge A_1 \wedge A_2) = 1$ et $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 0$. On a donc également $\bar{\delta}(\bigwedge \Gamma \wedge (A_1 \wedge A_2)) = 1$.

4.

$$\pi = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \Delta, A_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \Delta, A_2\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \wedge A_2}\,{\scriptstyle \wedge_d} \right.$$

CQFD

Comme dans le cas de la règle de coupure, on raisonne selon que $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ est une feuille de π_1 ou π_2. Dans le deux cas, on vérifie que l'on obtient une disribution δ telle que $\bar{\delta}(\bigvee \Delta \vee (A_1 \wedge A_2))$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les cas restants.

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour démontrer le théorème de complétude du calcul des séquents pour le calcul propositionnel.

Théorème (3) : pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$ si $\Gamma \models \Delta$ alors il existe une dérivation (complète) de $\Gamma \vdash \Delta$.

Preuve : Procédons par l'absurde. Nous supposons donc que $\Gamma \models \Delta$ et qu'il n'existe aucune dérivation complète de $\Gamma \vdash \Delta$.

Le théorème (1) nous permet d'affirmer qu'il existe une dérivation maximale π de $\Gamma \vdash \Delta$. Par hypothèse, π n'est pas complète et contient donc une feuille $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ telle que $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$. Par le lemme (5) que nous venons de montrer, il existe donc une distribution δ telle que $\bar{\delta}(\bigwedge \Gamma) = 1$ et $\bar{\delta}(\bigvee \Delta) = 0$; ce qui contredit l'hypothèse $\Gamma \models \Delta$. CQFD

1.6 Une variante du calcul des séquents

Dans le paragraphe précédent, nous avons donné une version peu pratique des règles du calcul des séquents dans laquelle les prémisses des règles binaires manipulaient les mêmes ensembles de proposition[3]. Nous donnons ici une autre formulation du calcul des séquent dans laquelle cette exigence est abandonnée. Nous montrons que cela ne change, en fait rien, vis à vis de l'ensemble des formules dérivables. Cette formulation alternative nous permettra de démontrer plus aisément un théorème fondamental de la théorie de la démonstration : *l'élimination des coupures.*

Le calcul des séquent peut donc se reformuler selon les règle ci-aprés :

Axiome
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,{\scriptstyle Ax}$

Coupure
$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$

Négation	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,{\scriptstyle \neg_g}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,{\scriptstyle \neg_d}$

[3]exception faite de la proposition éliminée ou introduite

Conjonction	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_g$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B}\wedge_d$

Disjonction	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \vee B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\vee_d$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\vee_g$

Implication	
Gauche	Droite
$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \Rightarrow B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\Rightarrow_d$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\Rightarrow_g$

L'affaiblissement On peut toujours se donner plus d'hypothèses (voire plus de conclusions) que nécessaires sans changer la structure générale de la preuve. C'est ce que l'on appelle l'*affaiblissement*. Plus formellement, on a

Théorème (4) : si π est une dérivation du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ alors il existe une dérivation π', utilisant les mêmes règles et dans le même ordre que π, qui est une dérivation d'un séquent $\Gamma_0, \Gamma \vdash \Delta_0, \Delta$.

Preuve: par induction sur π, en considérant la dernière règle appliquée :

1. si $\pi = \left\{\dfrac{}{\Gamma', A \vdash A, \Delta'}\,Ax\right.$ on a immédiatement $\pi = \left\{\dfrac{}{\Gamma_0, \Gamma', A \vdash \Delta_0, A, \Delta'}\,Ax\right.$
2. si

$$\pi = \left\{ \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \vdots \\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,Cut \right.$$

par hypothèse d'induction, on a π'_1, dérivation de $\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta_0, \Delta_1, A$, et π'_2, dérivation de $A, \Gamma_0, \Gamma_2 \vdash \Delta_0, \Delta_2$. On pose alors

$$\pi' = \left\{ \dfrac{\begin{matrix}\pi'_1 \\ \vdots \\ \Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta_0, \Delta_1, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi'_2 \\ \vdots \\ A, \Gamma_0, \Gamma_2 \vdash \Delta_0, \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2}\,Cut \right.$$

Les autres cas, tout aussi triviaux, sont laissés en exercice.

Le lemme d'affaiblissement (4) nous permet d'affirmer que pour toute dérivation construite à partir des règles variantes du calcul des séquents, il existe une dérivation du même séquent utilisant les règles, données en (1.4.2), du calcul original : il suffit d'appliquer le lemme d'affaiblissement aux prémisses de chacune des règles.

La règle de coupure : *Cut* L'apparition de la notion de preuve formelle a ouvert un vaste champs d'investigation de la logique mathématique : la *théorie de la démonstration*. Nombre de résultats fondamentaux de ce domaine concernent la notion de *coupure* exprimée par la règle *Cut* du calcul des séquents. Intuitivement, l'utilisation d'une coupure est l'équivalent, dans le raisonnement mathématique usuel, de l'utilisation d'un *lemme* : on a démontré un certain résultat que l'on applique pour les besoins particuliers d'une autre démonstration. La particularité de la règle de coupure est qu'elle ne sert, en fait, à rien !
En d'autres termes, et c'est le résultat que nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe,

THÉORÈME (5) : s'il existe une dérivation π du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ alors il existe une dérivation π' du même séquent $\Gamma \vdash \Delta$ qui *n'utilise pas la règle Cut*.

C'est une démonstration un peu délicate qui réclame un raisonnement selon une double induction. C'est également un démonstration *constructive* en ce sens qu'elle fournit une *procédure d'élimination des coupures*.

Nous allons donc démontrer un premier lemme qui permet d'éliminer *une* coupure dans une dérivation. Un dérivation étant un arbre, on peut définir la notion de *hauteur* d'une dérivation π, que l'on $h(\pi)$. De même, on peut définir la *taille* d'une proposition A que l'on note $t(A)$. Dans la règle de coupure

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$$

on dit que A est la *formule de coupure*; on dit égalemnt que c'est une règle de coupure *sur A* et qu'elle est de *degré t(A)*. On dira que le *degré (de coupure)* d'une preuve π est le degré maximal des ses règles de coupures, on note $d(\pi)$.
Soit donc π une dérivation du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dont la dernière règle est une règle de coupure sur la proposition A. Ce que l'on représente par

$$\frac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots \\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots \\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$$

on a

LEMME (6) : si $d(\pi) = t(A)$, si $d(\pi_1) < d(\pi)$ et si $d(\pi_2) < d(\pi)$ alors il existe une dérivation π' de $\Gamma \vdash \Delta$ telle que $d(\pi') < d(\pi)$.

On raisonne par induction sur $h(\pi)$ en considérant les différents cas possible des règle terminant π_1 et π_2

1. *(a)* si π est un axiome portant sur A, *ie* si $\Gamma_1 = A, \Gamma'_1$, on a

$$\frac{\dfrac{}{A, \Gamma'_1 \vdash \Delta_1, A}\,{\scriptstyle Ax} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots \\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{A, \Gamma'_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$$

   en utilisant le lemme d'affaiblissement, il existe une dérivation π'_2 du séquent $A, \Gamma'_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$ telle que $d(\pi'_2) = d(\pi_2)$. On pose alors

$$\pi' = \left\{ \begin{array}{c}\pi'_2\\ \vdots \\ A, \Gamma'_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2\end{array}\right.$$

   (b) si π est un axiome portant sur $B \neq A$, *ie* si $\Gamma_1 = \Gamma'_1, B$ et $\Delta_1 = B, \Delta'_1$ on pose simplement

$$\pi' = \left\{ \dfrac{}{\Gamma'_1, B, \Gamma_2 \vdash B, \Delta'_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Ax}\right.$$

2. le cas où π_2 se réduit à la règle Ax se traite de façon duale.

3. si π_1 se termine par une règle de coupure, on a

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_{11}\\ \vdots\\ \Gamma_{11} \vdash \Delta_{11}, A, B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{12}\\ \vdots\\ B, \Gamma_{12} \vdash \Delta_{12}, A\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A}\,{\scriptstyle Cut} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$$

avec $\Gamma_1 = \Gamma_{11}, \Gamma_{12}$ et $\Delta_1 = \Delta_{11}, \Delta_{12}$. On procède alors à la transformation suivante

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_{11}\\ \vdots\\ \Gamma_{11} \vdash \Delta_{11}, B, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{2}\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_{11}, \Gamma_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_2, B}\,{\scriptstyle Cut} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{12}\\ \vdots\\ B, \Gamma_{12} \vdash \Delta_{12}, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{2}\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{B, \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$$

Posons

$$\rho_1 = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{11}\\ \vdots\\ \Gamma_{11} \vdash \Delta_{11}, B, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{2}\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_{11}, \Gamma_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_2, B}\,{\scriptstyle Cut} \right. \quad \text{et} \quad \rho_2 = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{12}\\ \vdots\\ B, \Gamma_{12} \vdash \Delta_{12}, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{2}\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{B, \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut} \right.$$

par hypothèse d'induction, il existe une dérivation ρ_1' du séquent $\Gamma_{11}, \Gamma_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_2, B$ et une dérivation ρ_2' du séquent $B, \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash \Delta_{12}, \Delta_2$ telles que $d(\rho_1') < d(\rho_1)$ et $d(\rho_2') < d(\rho_2)$. On pose alors

$$\pi' = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\rho_1'\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \Delta, B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\rho_2'\\ \vdots\\ B, \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut} \right.$$

4. le cas où π_2 se termine par une règle de coupure se traite de façon duale.
5. si la dernière règle de π_1, ou de π_2, est une règle d'introduction (gauche ou droite) d'une proposition $B \neq A$, on peut alors inverser la règle d'introduction de B et la coupure sur A, par exemple, si $B = B_1 \Rightarrow B_2$, en posant $\Gamma_1 = \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, B1 \Rightarrow B_2$ et $\Delta_1 = \Delta_{11}, \Delta_{12}$, on peut avoir

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_{11}\\ \vdots\\ \Gamma_{11} \vdash \Delta_{11}, B_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{12}\\ \vdots\\ \Gamma_{12}, B_2 \vdash \Delta_{12}, A\end{array}}{\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, B_1 \Rightarrow B_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_{12}, A}\,{\scriptstyle \Rightarrow_g} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, B_1 \Rightarrow B_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}$$

on obtient

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_{11}\\ \vdots\\ \Gamma_{11} \vdash \Delta_{11}, B_1\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{12}\\ \vdots\\ \Gamma_{12}, B_2 \vdash \Delta_{12}, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_{12}, B_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}}{\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, B_1 \Rightarrow B_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle \Rightarrow_g}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à π_2 qui nous donne une dérivation π_2' telle que $d(\pi_2') < d(\pi)$, on pose alors

$$\pi' = \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{11}\\ \vdots\\ \Gamma_{11} \vdash \Delta_{11}, B_1\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{12}\\ \vdots\\ \Gamma_{12}, B_2 \vdash \Delta_{12}, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_{12}, B_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle Cut}}{\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, B_1 \Rightarrow B_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_2}\,{\scriptstyle \Rightarrow_g} \right.$$

On vérifie (en exercice) que tous les autres cas de règles introduisant une proposition autre A se résolvent aussi facilement.

6. les derniers cas à examiner sont ceux où la formule de coupure est introduite par la dernière règle de π_1 et la dernière règle de π_2. On montre, dans ce cas que l'on peut remplacer la coupure sur A par des coupures de degré strictement inférieur. Par exemple, si $A = A_1 \Rightarrow A_2$. Posons $\Gamma_2 = \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$ et $\Delta_2 = \Delta_{21}, \Delta_{22}$. On a

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma_1, A_1 \vdash \Delta_1, A_2\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A_1 \Rightarrow A_2}\Rightarrow_d \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{21}\\ \vdots\\ \Gamma_{21} \vdash \Delta_{21}, A_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_{22}\\ \vdots\\ \Gamma_{22}, A_2 \vdash \Delta_{22}\end{array}}{\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, A_1 \Rightarrow A_2 \vdash \Delta_{21}, \Delta_{22}}\Rightarrow_g}{\Gamma_1, \Gamma_{21}, \Gamma_{22} \vdash \Delta_1, \Delta_{21}, \Delta_{22}}\,Cut$$

   On peut alors décomposer la coupure sur $A_1 \Rightarrow A_2$ en une coupure sur A_1 et une coupure sur A_2 :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_{21}\\ \vdots\\ \Gamma_{21} \vdash \Delta_{21}, A_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ A_1, \Gamma_1 \vdash \Delta_1, A_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_{21} \vdash \Delta_1, \Delta_{21}, A_2}\,Cut \qquad \begin{array}{c}\pi_{22}\\ \vdots\\ A_2, \Gamma_{22} \vdash \Delta_{22}\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_{21}, \Gamma_{22} \vdash \Delta_1, \Delta_{21}, \Delta_{22}}\,Cut$$

   Ce qui nous donne bien une dérivation π' telle que $d(\pi') < d(\pi)$. Les autres cas de A sont laissés en exercice.

En itérant le processus d'élimination d'*une* coupure que nous donne le lemme ci-dessus, on obtient une procédure d'élimination de *toutes* les coupures. On peut montrer qu'en s'appliquant toujours à une coupure de degré maximal, chaque itération fait décroître un ceratine *mesure* des dérivations.
Soit une dérivation π, soit d son degré maximal de coupure, soit n le nombre de coupure de degré n dans π, On dit que le couple (d, n) est une mesure de π.

Il est facile de montrer que si d est un degré de coupure dans une dérivation π, il existe toujours une *sous-dérivation* (*ie* : un sous-arbre) de π dont la dernière règle est une coupure de degré d et qui ne contient que des coupures de degrés strictement inférieurs à d. Appelons une telle coupure *d-maximale*. Si donc, (d, n) est la mesure de π, en choisissant une coupure d-maximale et en lui appliquant la procédure d'élimination d'une coupure, on obtient ou bien une nouvelle dérivation de mesure $(d, n-1)$, si $n > 1$, ou bien une nouvelle dérivation de degré (d', n') avec $d' < d$ (en vertu de lemme (6)). En utilisant l'ordre lexicographique sur les couples, on a qu'ou bien $(d, n-1) < (d, n)$, si $n > 1$, ou bien $(d', n') < (d, n)$ On fait ainsi décroître notre mesure, selon un ordre lexicographique. Nous avons donc une procédure *qui termine* et qui permet d'éliminer toutes les coupures de π.

1.7 Décidabilité

Le calcul des séquents est un langage formel de preuve. Il est donc possible, ce qui ne l'ai pas lorsque les preuves sont rédigées en langue naturelle, d'écrire un *algorithme* qui prend en entrée un arbre du calcul des séquents et qui répond, au bout d'un temps fini, si oui ou non l'arbre en question est une oruve de son séquent racine. Cependant, une chose est de vérifier si un arbre est une preuve d'un séquent donné, une autre est de construire un arbre qui soit une preuve d'un séquent donner.
De façon plus générale (*ie* : indépendament du formalisme particulier du calcul des séquents) répondre à la question ≪existe-t-il un algorithme qui étant donné une proposition réponde, au bout d'un temps fini, si oui ou non cette proposition est une tautologie ou non ? ≫c'est résoudre le *problème de la décidabilité* du calcul des propositions.

Pour répondre sérieusement à cette question, il nous faudrait, au préalable, définir rigoureusement ce que recouvre le terme ≪algorithme≫ Une telle entreprise nous entrainerait dans l'étude de la théorie de la *calculabilité* ce qui n'est pas notre propos ici. Nous nous contenterons donc, pour statuer du probléme de la décidabilité du calcul des propositions de la notion intuitive que nous avons de ce qu'est un algorithme.

Nous allons définir un *algorithme de décision* pour le calcul des propositions utilisant les règles de déduction du calcul des séquent. Comme l'affirme le théorème (5) dit d'élimination des coupures, pour construire une dérivation complète, si elle existe, d'un séquent, il suffit de chercher une dérivation sans coupure. On remarque alors deux choses :

1. pour chaque cas de proposition, à droite ou à gauche d'un séquent, il n'existe qu'une seule règle applicable;
2. chaque règle du calcul sans coupure fait strictement décroître la taille de la formule traitée.

Ces remarques nous permettent de définir une fonction récursive SA qui prend en entrée un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ et construit un ensemble Φ de séquents atomiques.

Si $\Gamma = \neg A, \Gamma'$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma' \vdash \Delta, A)$
sinon, si $\Gamma = A \wedge B, \Gamma'$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(A, B, \Gamma' \vdash \Delta)$
sinon, si $\Gamma = A \vee B, \Gamma' \vdash \Delta$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(A, \Gamma' \vdash \Delta)$; $\Phi = \Phi \cup SA(B, \Gamma' \vdash \Delta)$
sinon, si $\Gamma = A \Rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma' \vdash \Delta, A)$; $\Phi = \Phi \cup SA(B, \Gamma' \vdash \Delta)$
sinon, si $\Delta = \neg A, \Delta'$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma, A \vdash \Delta')$
sinon, si $\Delta = A \wedge B, \Delta'$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma \vdash \Delta', A)$; $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma \vdash \Delta', B)$
sinon, si $\Delta = A \vee B, \Delta'$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma \vdash \Delta', A, B)$
sinon, si $\Delta = A \Rightarrow B, \Delta'$ alors
  $\Phi = \Phi \cup SA(\Gamma, A \vdash \Delta', B)$
sinon { $\Gamma \vdash \Delta$ *est atomique*}
  $\Phi = \Gamma \vdash \Delta$

La procédure de décision des tautologies qui prend en argment une formule A et qui retourne ≪OUI≫ ou ≪NON≫ est définie par :

$\Phi = \emptyset$;
$\Phi = SA(\emptyset \vdash A)$;
si pour tout $\Gamma_0 \vdash \Delta_0 \in \Phi$, on a $\Gamma_0 \cap \Delta_0 \neq \emptyset$ alors
  retourner ≪OUI≫
sinon
  retourner ≪NON≫