# 5 Théorie des ensembles

Nous allons, dans ce paragraphe apprendre la *langue universelle* des mathématiques : le langage des ensembles. Nous donnerons dans ce paragraphe la présentation axiomatique historique dite de *Zermelo*. Dans la troisième partie de ce cours, nous donnerons une seconde axiomatisation, celle utilisée par J-R Abrial pour définir la méthode.

## 5.1 La théorie Z

La théorie Z se compose de six axiomes. L'un définit l'égalité entre ensembles, les autres posent l'existence de nouveaux ensembles construits à partir d'ensembles déjà existants. En utilisant le premier axiome, on montre l'unicité des ensembles construits à l'aide des cinq autres.

Notre langage se compose de deux symboles de prédicats binaires : $=$ et $\in$. Si $a$ est un ensemble et $A$ une formule, nous nous autoriserons l'abréviation usuelle $\forall x \in a.A$ pour $\forall x.x \in a \Rightarrow A$

Le but de l'axiomatisation est de donner un statut formel à ces symboles que nous avons jusqu'ici employés intuitivement.
Au fur et à mesure de l'énoncé des axiomes de Z, nous montrerons comment on retrouve certaines des constructions et notations ensemblistes usuelles.

| Extensionnalité | |
|---|---|
| Z0 : | $\forall x \forall y.(\forall w.(w \in x \Leftrightarrow w \in y)) \Rightarrow x = y$ |

Cet axiome définit l'égalité entre ensembles. Il affirme que si deux ensembles ont les mêmes éléments alors ils sont égaux.

Il est d'usage en mathématique de démontrer l'égalité entre deux ensembles $a$ et $b$ non pas en utilisant l'axiome d'extensionnalité, mais en montrant que *a est inclus dans b* et réciproquement. Une théorie axiomatique n'aurait guère de d'intérêt si elle ne nous permettait pas de retrouver l'usage. Nous allons voir comment faire ici.

On *sait* que l'ensemble $a$ est inclus dans l'ensemble $b$ si et seulement si tous les éléments de $a$ sont aussi des éléments de $b$. On peut formaliser ce savoir par la formule à deux variables libres $a$ et $b$ :

$$\forall x.x \in a \Rightarrow x \in b$$

De plus, lorsque $a$ est inclus dans $b$ on note : $a \subseteq b$. On retrouve cet usage en posant la *définition*

$$a \subseteq b \ ::= \forall x.x \in a \Rightarrow x \in b$$

On peut alors valider l'usage en démontrant

$$a = b \Leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a)$$

On s'autorisera la notation $x \supseteq y$ pour $y \subseteq x$. On dira également que $a$ est un *sous-ensemble* de $b$, ou que $a$ est une *partie* de $b$ lorsque $a \subseteq b$.

| Paire | |
|---|---|
| Z1 : | $\forall x \forall y \exists z.\forall w(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$ |

Cet axiome permet à partir de deux ensembles $x$ et $y$ d'obtenir un nouvel ensemble $z$ qui contient $x$ et $y$ exactement. Puisque l'axiome de la paire nous affirme l'existence et l'unicité d'un tel ensemble, nous sommes autorisés à introduire une notation pour le dénoter. Pour reprendre l'usage, on notera $\{x, y\}$ ce nouvel ensemble et on l'appelle la *paire* $x$,$y$. Formellement, l'usage de la notation $\{a, b\}$ pour l'ensemble dont l'axiome de la paire nous garantit l'existence est une utilisation de la règle d'élimination du quatificateur existentiel : la notation $\{a, b\}$ n'est pas autre chose que le choix d'un *nom* pour l'ensemble ainsi obtenu.

Si $a$ et $b$ sont le même ensemble, l'axiome de la paire permet de construire un nouvel ensemble dont le seul élément est $a$ (ou $b$). On appelle cet ensemble le *singleton* $a$ et on note $\{a\}$.

- ATTENTION : il ne faut pas confondre la *paire* $a$,$b$ avec le *couple* noté, selon l'usage, $(a, b)$. Dans la paire $\{a, b\}$ l'ordre n'importe pas (*ie*: $\{a, b\} = \{b, a\}$) ce qui n'est pas le cas du couple que l'on appelle également *paire ordonnée*. Pour retrouver le couple et sa notation usuelle, on pose :

$$(a, b) \ ::= \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Cette définition diffère un peu de celle de l'inclusion :

> lorsque nous avions définit la notation $a \subseteq b$, nous avions défini une notation pour une *formule* exprimant une relation entre (éléments de) deux ensembles, cette formule peut être vraie ou fausse, cela n'invalide par la définition;
>
> lorsque l'on définit la notation $(a, b)$ on définit une notation pour un nouvel *ensemble* construit à partir de $a$ et $b$, comme dans le cas de la notation $\{a, b\}$, la notation $(a, b)$ peut être vue comme le choix d'un nom, la différence est que pour justifier l'existence et l'unicité de l'ensemble noté $(a, b)$ il faut procéder à une démonstration un peu plus longue.

EXERCICE (14) : Justifier la notation $(a, b)$ et monter que : $\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2.(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$

| RÉUNION | |
|---|---|
| Z2 : | $\forall x \exists z. \forall w(w \in z \Leftrightarrow \exists v.(v \in x \wedge w \in v))$ |

Cet axiome permet de former à partir d'un ensemble $x$ un nouvel ensemble dont les éléments (les $a$) sont tous les éléments des éléments de $x$ (les $b$). La notation usuelle pour la réunion des éléments d'un ensemble $a$ est $\bigcup_{x \in a} x$ où encore, $\bigcup a$.

L'axiome de la paire et celui de la réunion permettent de retrouver l'opération usuelle d'union de deux ensembles notée $\cup$ L'axiome de la paire nous donne $\{a, b\}$ et l'axiome de la réunion nous donne l'ensemble, noté $a \cup b$ dont les éléments sont les éléments de $a$ et les éléments de $b$.

EXERCICE (15) : Montrer que : $\forall x.x \in (a \cup b) \Leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)$

EXERCICE (16) : En utilisant l'axiome de la paire et celui de la réunion justifiez la notation dite en *extension* des ensembles $\{a_1, .., a_n\}$ et montrez que $\forall x.x \in \{a_1, .., a_n\} \Leftrightarrow (x = a_1 \vee .. \vee x = a_n)$

| PARTIES | |
|---|---|
| Z3 : | $\forall x \exists z. \forall w(w \in z \Leftrightarrow \forall v.(v \in w \Rightarrow v \in x))$ |

Cet axiome permet de former l'*ensemble des parties* d'un ensemble $x$, noté $\mathbb{P}(x)$, dont chaque élément $a$ est inclus dans $x$. En effet, en utilisation la notation $\subseteq$, l'axiome des parties s'écrit

$$\forall x \exists z. \forall w(w \in z \Leftrightarrow w \subseteq x)$$

EXERCICE (17) : Montrer que $\forall x. \bigcup \mathbb{P}(x) = x$

Soit $A$ une formule dont les variables libres sont libre $w, x_1, .., x_n$ (on note $A[w, x_1, .., x_n]$) Onpose le schéma d'axiome

| COMPRÉHENSION | |
|---|---|
| Z4 : | $\forall x_1 .. \forall x_n \forall x \exists z. \forall w(w \in z \Leftrightarrow (w \in x \wedge A[w, x_1, .., x_n]))$ |

Cet axiome permet de construire un nouvel ensemble en spécifiant les propriétés ($A[w, x_1, .., x_n]$) que doivent satisfaire ses éléments. Si $a, a_1, .., a_n$ sont des ensembles, on note $\{w \in a \mid A[w, a_1, .., a_n]\}$ l'ensemble des éléments $b$ de $a$ qui satisfont $A[b, a_1, .., a_n]$. Le schéma de compréhension ne permet que de former des sous-ensembles.

Pour avoir tenté un usage naïf d'un tel mode de définition des ensembles, les logiciens des origines (fin 19ième, début 20ième) se sont heurté au paradoxe dit *de Russell*. Supposons que nous ne prenions pas la précaution de limiter la définition par compréhension aux sous-ensembles en posant simplement :

$$\forall x_1 .. \forall x_n \exists z. \forall w(w \in z \Leftrightarrow A[w, x_1, .., x_n])$$

Si $a_1, .., a_n$ sont des ensembles, on noterait $\{w \mid A[w, a_1, .., a_n]\}$ l'ensemble de $w$ tels que $A[w, a_1, .., a_n]$. Ceci admis, considérons la propriété : $x \notin x$. On pourrait former l'ensemble $e \ ::= \{x \mid x \notin x\}$. On peut alors se poser la question de savoir si $e$ appartient à $e$ ou non. De deux choses l'une :

1. si $e \in e$ alors, par définition, $e \notin e$;
2. mais, si $e \notin e$ alors, par définition, $e \in e$.

Exercice (18) : Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles; c'est à dire que la formule $\exists z.\forall x(x \in z)$ est fausse dans la théorie Z0, .., Z4.

L'axiome de compréhension permet d'obtenir l'existence de l'*ensemble vide*. Il suffit d'utiliser l'axiome de compréhension avec une proposition contradictoire (*ie*: telle qu'aucun élément ne puisse la satisfaire) :

$$\forall x \exists z.\forall w(w \in z \Leftrightarrow (w \in x \wedge w \neq w)$$

Il est clair que l'ensemble $z$ ainsi construit ne peut contenir aucun élément : quelque soit l'ensemble $a$, il n'existe aucun $w$ tel que $w \in a \wedge w \neq w$ donc l'ensemble $\{w \in a \mid w \neq w\}$ ne contient aucun élément. L'extentionnalité nous garantit l'unicité d'un tel ensemble : notons le $\emptyset$. C'est le premier ensemble que nous obtenons dont l'existence ne dépende d'aucun autre.

On retrouve l'opération d'intersection entre deux ensembles $a$ et $b$, notée $\cap$ en particularisant le schéma de compréhension à la formule $w \in a \wedge w \in b$. On note $a \cap b$ l'(unique) ensemble ainsi obtenu.

Soit $a$ un ensemble, on pose :

$$succ(a) \ ::= a \cup \{a\}$$

| Infini | |
|---|---|
| Z5 : | $\exists z.(\emptyset \in z \wedge \forall a(a \in z \Rightarrow succ(a) \in z))$ |

Cet axiome affirme l'existence d'un ensemble *infini*. La question du fini et de l'infini, pour être définies rigoureusement, réclameraient que l'on introduise les notions d'*ordinal* et d'*ordinal limite*, etc... Compte tenu de l'utilisation que nous ferons des ensembles, nous ne désirons pas entrer dans tant de détails et conserverons à l'infini sont caractère intuitif. Nous nous contenterons donc de justifier intuitivement l'axiome de l'infini : on prend $\emptyset$ pour 0 et on interprète la fonction $S$ sur les entiers par la fonction qui à tout ensemble $a$ associe $succ(a)$; on obtient ainsi l'ensemble des entiers naturels.

De même, il peut sembler surprenant d'avoir besoin d'affirmer l'existence d'un ensemble infini. Nous nous contenterons comme justification de l'affirmation que l'axiome de l'infini n'est pas déductible des cinq précédents.

## 5.2 Relations, fonctions

En introduisant le calcul des prédicats, nous avons parlé de symboles de fonctions et de symboles de relation. Lorsque nous avons construit les modéles nous avons fait appel à notre connaissance intuitive des termes ≪fonction≫ et ≪relation≫ Nous sommes à présent en mesure de retrouver formellement ces notions.

Soient $a$ et $b$ deux ensembles. On appelle $a$ *première projection* où *première composante* du couple $(a, b)$ et $b$, *seconde projection* ou *seconde composante* de $(a, b)$.

Soient $a$ et $b$ deux ensembles, on définit le *produit cartésien* de $a$ et $b$ noté $a \times b$ par :

$$a \times b \ ::= \{w \in I\!P I\!P(a \cup b) \mid \exists v_1 \exists v_2.(v_1 \in a \wedge v_2 \in b \wedge w = (v_1, v_2)\}$$

Il est clair que les éléments $w$ de $a \times b$ sont des couples ($w = (v_1, v_2)$) dont les premières composantes sont dans $a$ ($v_1 \in a$) et la seconde dans $b$ ($v_2 \in b$). Il est un peu plus difficile de voir que l'ensemble de base choisi contient bien les bons éléments. Eclairons ce point :

- les éléments de $a \cup b$ sont des éléments de $a$ ou (inclusivement) de $b$;

- l'ensemble $I\!P(a \cup b)$ contient des ensembles dont les éléments sont dans $a$ ou (inclusivement) dans $b$; en particulier, $I\!P(a \cup b)$ contient tous les singletons $\{v_1\}$ formés d'un élément de $a$ et toutes les paires $\{v_1, v_2\}$formées d'un élément de $a$ et d'un élément de $b$;

- l'ensemble $I\!P I\!P(a \cup b)$ contient donc, en particulier les les paires ordonées $\{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$ avec $v_1 \in a$ et $v_2 \in b$.

Remarquons que les sous-ensembles de produits cartésiens sont des produits cartésiens. Si l'ensemble $a$ est un produit cartésien, on s'autorisera l'abus de notation $(v_1, v_2) \in a$ pour $\exists c.c \in a \wedge c = (v_1.v_2)$. On poussera l'abus jusqu'aux définitions en compréhension en notant $\{(v_1, v_2) \in a \mid A\}$ pour $\{c \in a \mid c = (v_1, v_2) \wedge A\}$ Nous irons même jusqu'à noter $\forall (v_1, v_2) \in a.A$ pour $\forall v_1 \forall v_2.(v_1, v_2) \in a \Rightarrow A$

On peut généraliser les notions de couples et produits cartésiens aux n-uplets $(v_1, .., v_n)$ et aux produits $a_1 \times .. \times a_n$, par récurence sur $n \geq 2$ :

> si $n = 2$, les couples $(v_1, v_2)$ sont des $2 - uplets$, ils appartiennent à $a_1 \times a_2$;
>
> pour $n > 2$, on pose $(v_1, v_2, .., v_n) \ ::= (v_1, (v_2, .., v_n))$ et $a_1 \times a_2 \times .. \times a_n \ ::= a_1 \times (a_2 \times .. \times a_n)$.

Si $a_1 = .. = a_n = a$, on pose $a^n \ ::= a_1 \times .. \times a_n$.

### Relations

> Si $a$ est un ensemble, on appelle *relation n-aire sur a* tout sous-ensemble de $a^n$. Autrement dit, $a^n$ est l'*ensemble des relations* sur $a$ et $r \in \mathcal{P}(a^n)$.
>
> Si $a$ est un ensemble, $r$ une relation n-aire sur $a$ et $b$ une partie de $a$ on définit la *restriction de r à b* par : $b \lhd r \ ::= r \cap b^n$

Nous laissons au lecteur le soin de (se) rappeler ce qu'est une relation d'*équivalence* sur $a$ ainsi que ce que sont les *classes d'équivalences* induites par une relation.

Soit $r$ une relation binaire sur $a$, on dit que $r$ est une *relation d'ordre* (au sens large) sur $a$ si et seulement si :

1. elle est *reflexive*, *ie* : $\forall x.x \in a \Rightarrow (x, x) \in r$;
2. elle est *antisymétrique*, *ie* : $\forall x \forall y.((x, y) \in r \wedge (y, x) \in r) \Rightarrow x = y$;
3. elle est *transitive*, *ie* : $\forall x \forall y \forall z.((x, y) \in r \wedge (y, z) \in r) \Rightarrow (x, z) \in r$

On dit que $r$ est un *ordre total* sur $a$ si et seulement si $\forall x \in a.\forall y \in a.(x, y) \in r \vee (y, x) \in r$. On dit qu'une relation ordre est *stricte* si elle n'est pas réflexive.

On peut également définir des relations entre ensembles différents. On se contentera de relations *binaires* (entre deux ensembles)

> Soient $a$ et $b$ deux ensembles, on appelle *relation (binaire) entre a et b* tout sous-ensemble de $a \times b$ (*ie* $r \in \mathcal{P}(a \times b)$)
>
> Si $r$ est une relation entre $a$ et $b$, on dit que $a$ est le *domaine* de $r$ (notée $dom(r)$) et $b$ son codomaine (noté $ran(r)$)
>
> Si $r$ est une relation entre $a$ et $b$, et si $a'$ et $b'$ sont des sous-ensemble, respectivement de $a$ et $b$, on définit alors deux types de restrictions
> - l'une sur le domaine de $r$ : $a' \lhd r \ ::= r \cap a' \times b$
> - l'autre sur son codomaine : $r \rhd b' \ ::= r \cap a \times b'$.
>
> Si $r$ est une relation entre $a$ et $b$, on note $r^{-1}$ sa *relation inverse* définie par
>
> $$r^{-1} \ ::= \{(y, x) \in b \times a \mid (x, y) \in r\}$$

EXERCICE (19) : Montrer que $a' \lhd r = \{(w_1, w_2) \in r \mid w_1 \in a'\}$ et que $r \rhd b' = \{(w_1, w_2) \in r \mid w_2 \in b'\}$

La notion de relation entre ensemble nous fournit un des outils courants de la spécification formelle : elle permet de décrire facilement l'état désiré d'un système de données. En voici un tout petit exemple.

#### Sytème d'affectation d'enseignement

> ≪*On veut constituer la base de données des matières enseignées en indiquant qui est en charge de chaque matière. Un enseignant ne peut être affecté à une matière que s'il est qualifié pour cela.* ≫

Soit $Affect$ la base à constituer. Elle mettre en relation des matières et des enseignants. On se donne donc deux ensembles : $Mat$ et $Ens$. On a donc

$$Affect \in \mathcal{P}(Mat \times Ens)$$

De plus, un enseignant est qualifié (ou non) pour une ou plusieurs matière(s) C'est à nouveau une relation entre matières et enseignants, on se donne donc un ensemble

$$Qualif \in \mathcal{P}(Mat \times Ens)$$

Reste alors à exprimer la contrainte de qualification que doit respecter l'affectation : on reformule

*≪un enseignant ne peut être affecté à une matière que s'il est qualifié pour cela ≫*

en

*≪si un enseignant est affecté à une matière alors il est qualifié pour cette matière≫*

Ce qui se formalise (par exemple) en

$$\forall e \in Ens. \forall m \in Mat.(e, m) \in Affect \Rightarrow (e, m) \in Qualif$$

ou encore

$$\forall x. x \in Affect \Rightarrow x \in Qualif$$

c'est à dire

$$Affect \subseteq Qualif$$

EXERCICE (20) : Réservation de salles de TD : -)

**Fonctions** Une fonction n'est pas autre chose qu'une relation $f$ entre deux ensembles $a$ et $b$ qui associe aux éléments de $a$ aucun ou un seul élément de $b$. On note alors $Fun(f)$ que l'on définit par

$$Fun(f) \ ::= \forall x \forall y_1 \forall y_2.((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$$

En utilisant le schéma de compréhension, on définit le *domaine (de définition)* de $f$, noté $dom(f)$ ainsi que l'*image* de $f$, notée $ran(f)$ par :

$$dom(f) \ ::= \{x \in a \mid \exists y.(x, y) \in f\} \qquad ran(f) \ ::= \{y \in b \mid \exists x.(x, y) \in f\}$$

Une fonction $f$ de $a$ dans $b$ est dite *totale*, ou encore, est une *application* lorsque $dom f = a$.

EXERCICE (21) : Donnez, formellement, la définiton de fonction *injective*, *surjective* et *bijective*.

EXERCICE (22) : Montrer que si $f$ est une fonction injective alors $f^{-1}$ est une fonction (alors que ce n'est pas vrai pour les fonctions en général)

Si $f$ est une fonction (de $a$ dans $b$) et $(x, y) \in f$, on dit que $f$ est *définie en* $x$. On utilisera la notation usuelle $f(x)$ pour désigner $y$ que l'on appelle *image* de $x$ par $f$. Il est légitime de désigner $y$ par $f(x)$ car $y$ est unique, mais il faut prendre garde ici que l'expression $f(x)$ peut ne pas avoir de sens pour peu que $x \notin dom(f)$ Si $a'$ est une partie de $dom(f)$, on notera $f(a)$ l'*image* de (l'ensemble) $a$ par $f$, définie par :

$$f(a') \ ::= \{y \in b \mid \exists x \in a'.f(x) = y\}$$

### Système d'affectation d'enseignement (bis)

On peu reformuler notre petit exemple en n'utilisant plus des relations quelconques, mais des fonctions. Une matière peut être enseignée par plusieurs enseignants et plusieurs enseignants peuvent être qualifiés pour une matière. Les ensembles $Affect$ et $Qualif$ deviennent donc des fonctions de $Mat$ dans $\mathbb{P}(Ens)$. On peut supposer ces deux fonctions totales : l'image d'un élément pouvant être l'ensemble vide. Dans ce cas, la contrainte de qualification devient

$$\forall m \in Mat. \forall e \in Ens. e \in Affect(m) \Rightarrow e \in Qualif(m)$$

C'est à dire

$$\forall m \in Mat. Affect(m) \subseteq Qualif(m)$$

EXERCICE (23) : Montrer que ces deux formalisations sont équivalentes.