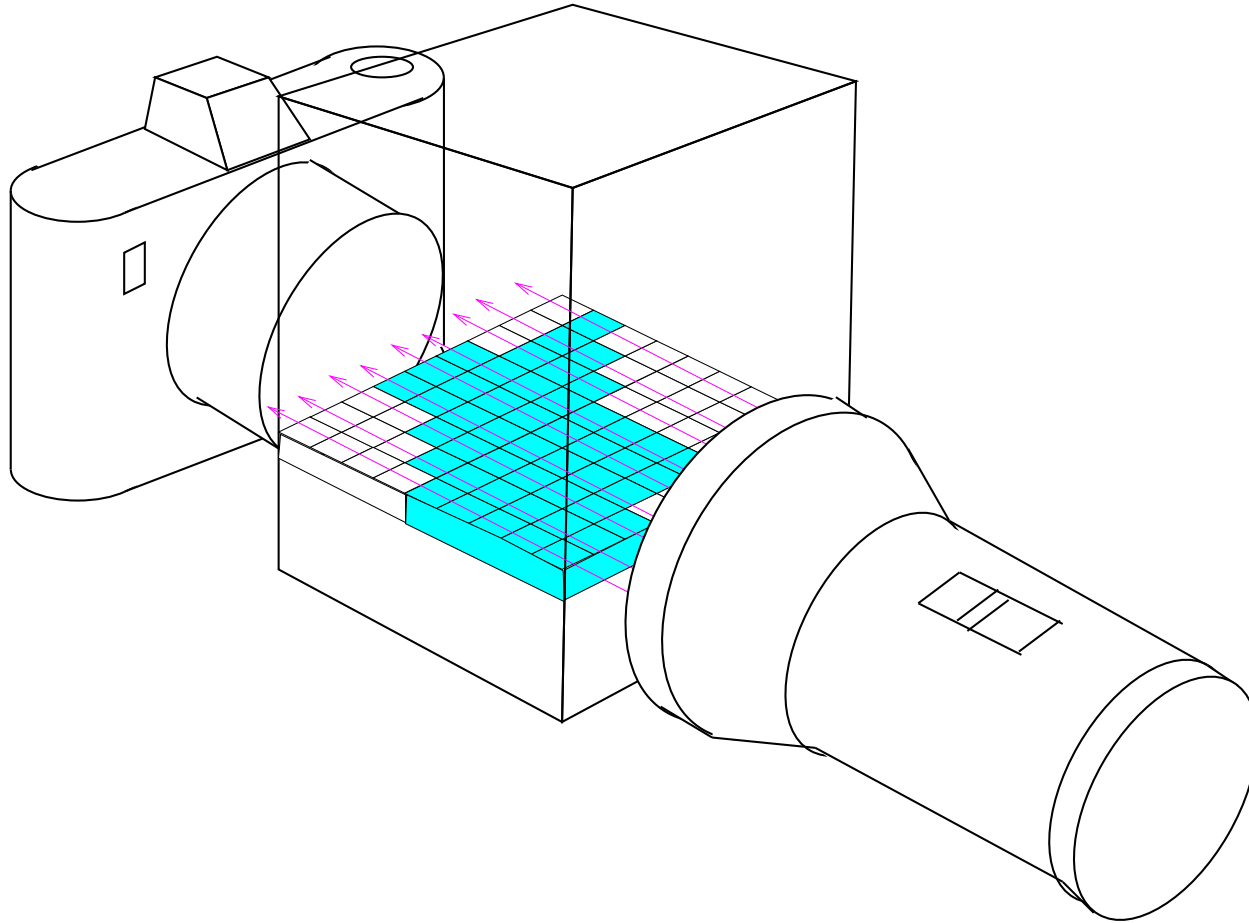


Tomographie discrète

Christoph Dürr

LRI, Univ. Paris-Sud

Le problème : informel



Etant donné des projections sur les lignes et les colonnes
retrouver une configuration qui a ces projections.

Plan de l'exposé

Considérer plusieurs variantes du problème de reconstruction, et trouver lesquelles sont NP-complètes et lesquelles peuvent être résolues efficacement.

- Le problème de base : reconstruire des ensembles de cellules
- Reconstruire des ensembles particuliers : polynominos, ensembles convexes, etc.
- Reconstruire des matrices de permutations
- Reconstruire des pavages

Reconstruire des matrices 0-1

Entrée: $r, c \in \mathbb{N}^n$

Sortie: $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ tel que

$$\sum_j A_{ij} = c_j \text{ et } \sum_i A_{ij} = r_i$$

Exemple

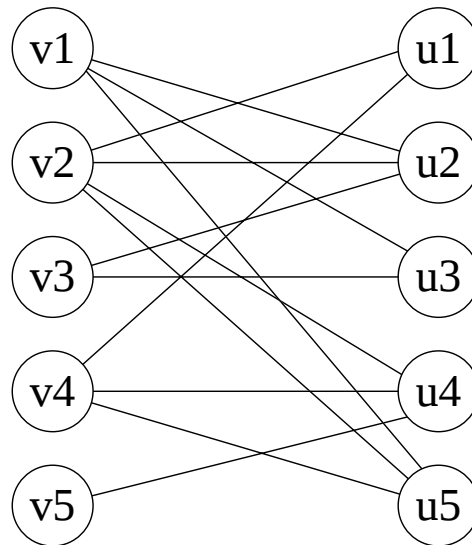
	2	3	2	3	3
3	0	1	1	0	1
4	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0

Autre formulation

Graphe Biparti aux Séquences de Degrés Données

Entrée: $r, c \in \mathbb{N}^n$

Sortie: un graphe biparti entre $\{v_1, \dots, v_n\}$ et $\{u_1, \dots, u_n\}$
tel que $r_i = d(v_i)$ et $c_j = d(u_j)$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$



Complexité

- Reconstruire une matrice: $O(n \log n)$ [Ryser,1957] et [Gale,1957]
- Compter le nombre de solutions: conjecturé #P-complet Pb ouvert!

*Compter le nombre de matrices dans $\mathbb{N}^{n \times n}$ aux projections $\langle r, c \rangle$ est #P-complet
[Kannan,Dyer,Mount,1997]*

- Décider si la solution est unique: $O(n \log n)$ [Ryser,1957]

Caracterisation de Ryser

Soient $r, c \in \mathbb{N}^n$ triés en ordre décroissant avec $\sum_i r_i = \sum_j c_j$.

Alors

Thm1 $\langle r, c \rangle$ a une solution si et seulement si $c \preceq \bar{r}$

Thm2 $\langle r, c \rangle$ a une unique solution si et seulement si $c = \bar{r}$

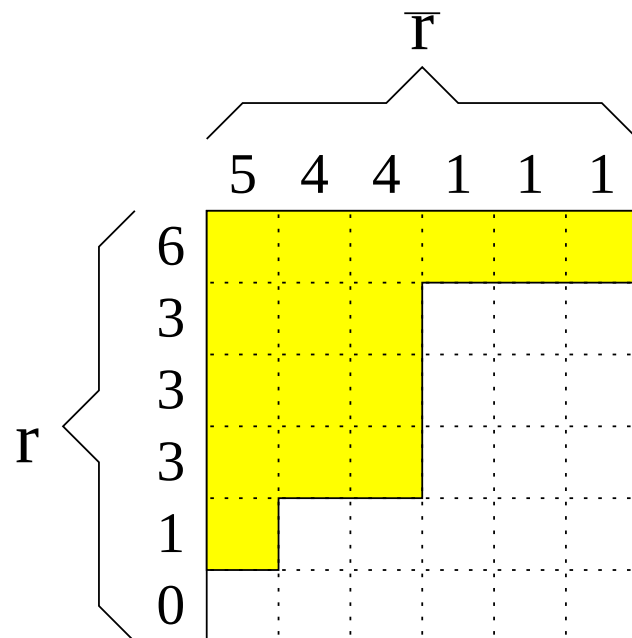
où

- $\bar{r}$ est le *dual* de r
- $c \preceq \bar{r}$ dénote que $\bar{r}$ domine c

Définition du dual

Le *dual* de $a \in [0, n]^n$ est le vector $\bar{a}$

$$\bar{a}_k = |\{j : a_j \leq k\}|$$



Fait

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Définition d'un ordre partiel

Pour $a, b \in [0, n]^n$ $a \preceq b$ (b domine a) si $\forall k \in [1, n]$

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$$

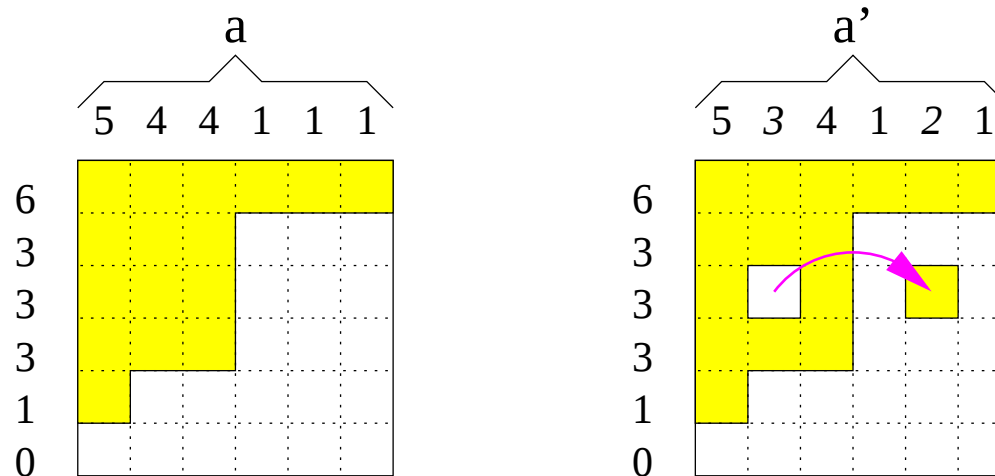
Fait

$$a \preceq b \text{ ssi } \bar{b} \preceq \bar{a}$$

Thm: $\langle r, c \rangle$ a une solution ssi $c \preceq \bar{r}$

Pour construire une solution il suffit de déplacer des cellules vers la droite dans une même ligne afin d'obtenir les projections sur les colonnes c . Cette opération donne des projections de colonnes plus petites ($\preceq$).

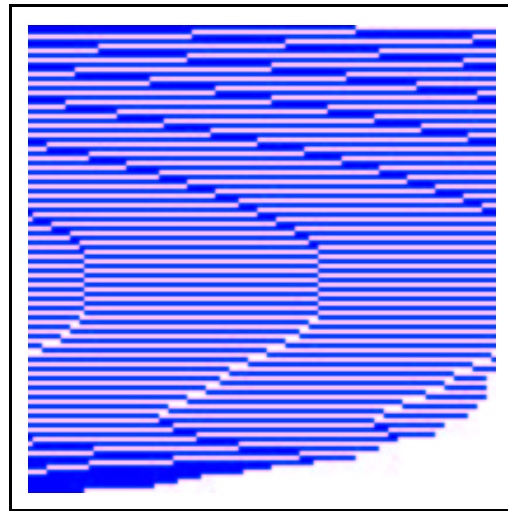
Opération élémentaire : $a' \preceq a$



Algorithme glouton en $O(n \log n)$

1. trier les colonnes tq les projections sont décroissantes
2. pour chaque ligne i , placer r_i cellules dans les colonnes aux plus grandes projections restantes.

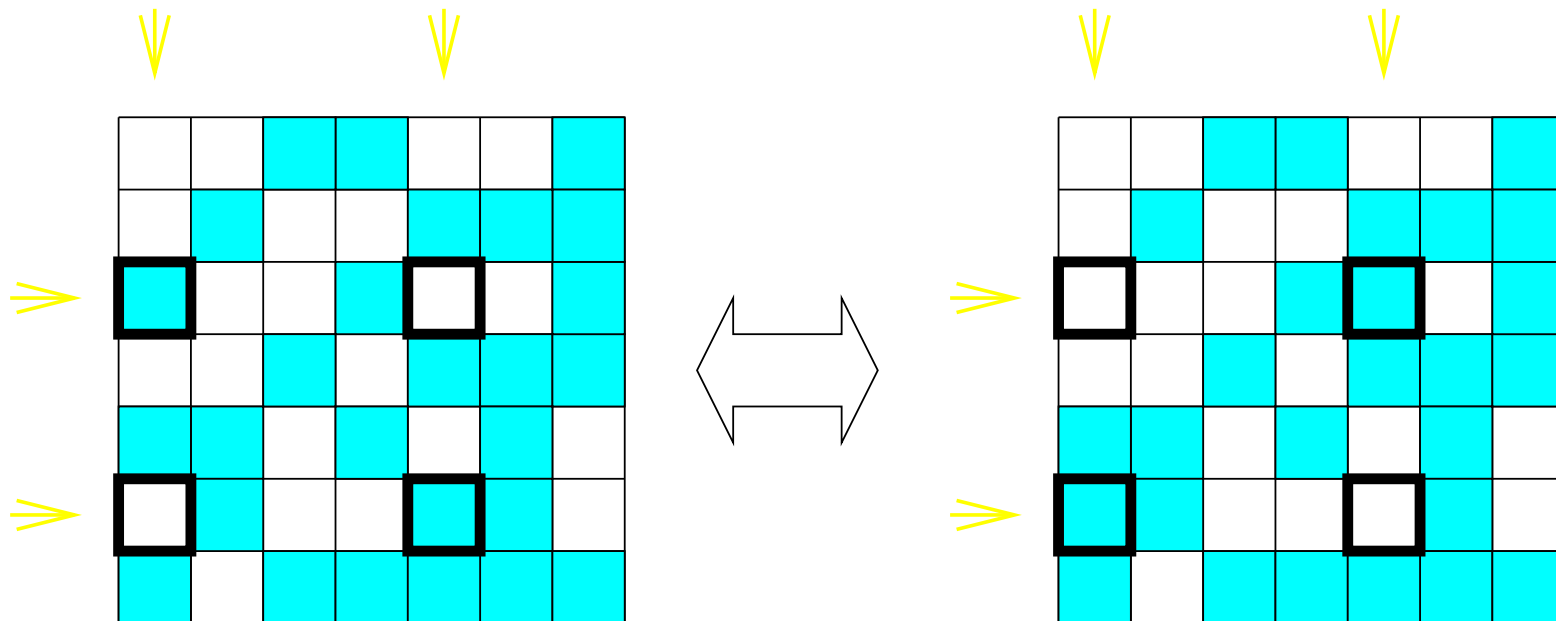
Ceci préserve l'invariant $c \preceq \bar{r}$, et peut être fait tq (1) l'ordre des projections sur les colonnes est préservé et (2) les cellules dans une ligne ne forment au plus deux intervalles.



On peut produire une représentation compacte de la matrice (taille $O(n \log n)$), qui permet des accès en temps constant.

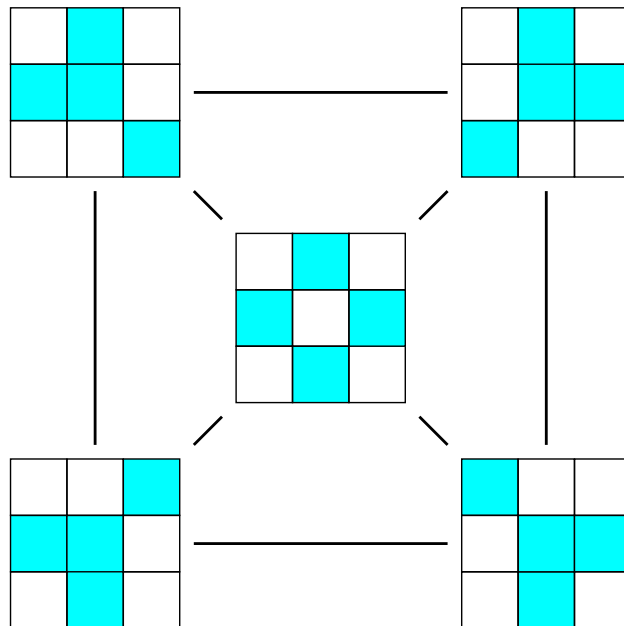
Echange élémentaire

L'intersection de deux colonnes et deux lignes, comportant 4 cellules, diagonalement de la même valeur $\rightarrow$ un échange circulaire des cellules préserve les projections.



Un ensemble de solutions très structuré

Toute matrice peut être obtenue par toute autre matrice ayant les mêmes projections par $O(n^2)$ échanges élémentaires

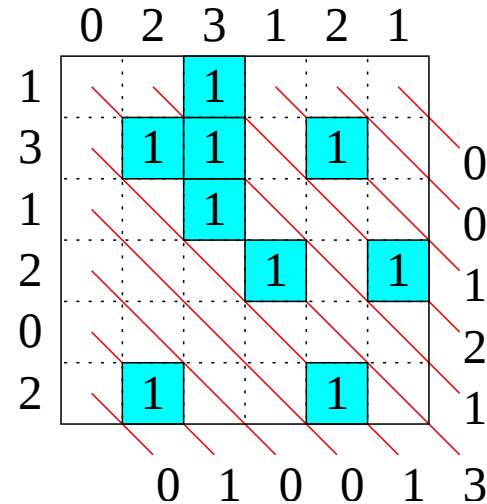


Reconstruire à partir de k projections

- Décider s'il existe une matrice 0-1 satisfaisant $k \geq 3$ projections données est NP-complet.

[Gardner, Gritzmann, Prangenberg, 2000]

Exemple pour $k=3$:



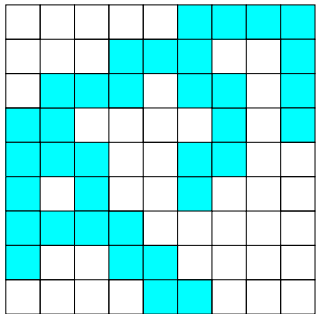
- On peut construire en temps polynomial une matrice 0-1 qui ne dépasse pas les projections et qui contient au moins $1/k$ des 1's demandés.

[Gritzman, de Vries, Wiegelman, 2001]

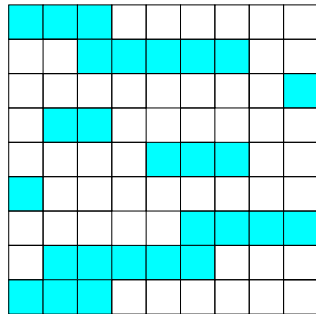
Propriétés de matrices 0-1

Il peut y avoir un nombre exponentiel de solutions. On peut vouloir reconstruire seulement des solution ayant une *bonne* propriété.

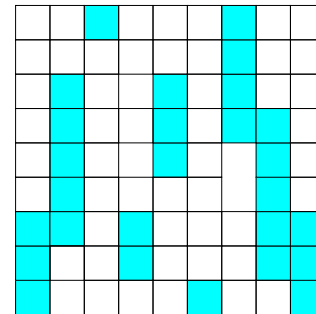
polyomino



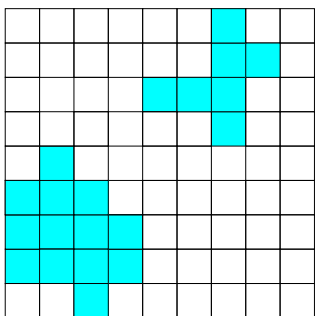
h-convex



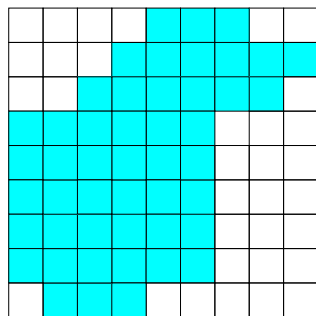
v-convex



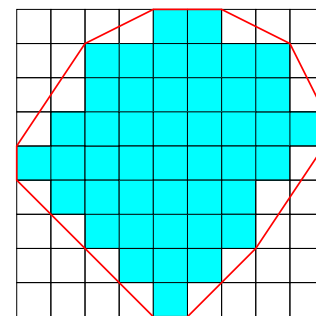
hv-convex



polyomino hv-convex



polyomino convex



Complexité

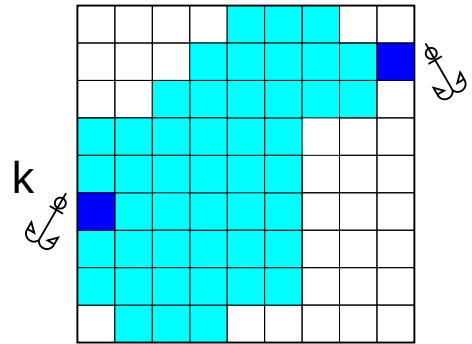
	-	h-convex	hv-convex	convex
-	$O(n \log n)$ [Ryser57]	NP-complet [Barcucci..96]	NP-complet [Woeginger96]	
polyomino	NP-complet [Woeginger96]	NP-complet [Barcucci..96]	$O(n^4)$ [*]	ouvert **

* [Barcucci,Del Lungo,Nivat,Pinzani,1996] puis [Chrobak,Dürr,1998]

puis . . .

** Pour 4 directions particulières ou 7 directions arbitraires le problème est polynomial et a une unique solution [Daurat,2001]

Un algorithme pour reconstruire des polyominos hv-convexes



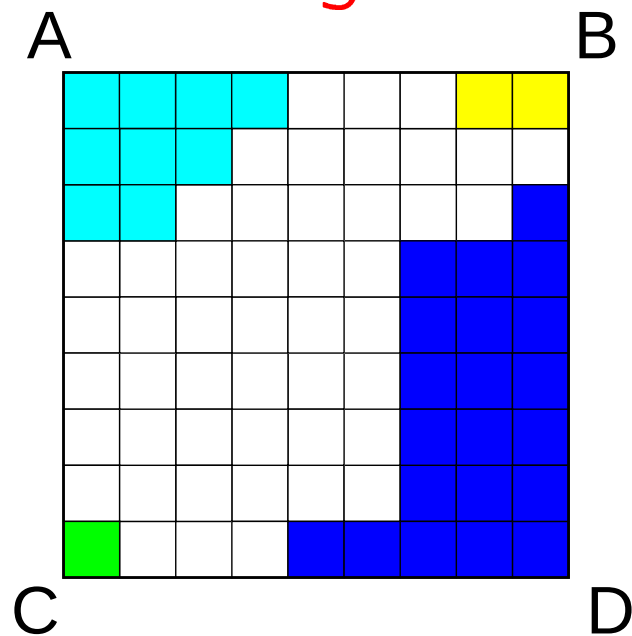
La Formule $2SAT_{F_{k,l}}$

est satisfiable ssi il y a une solution ancrée en k, l .

Algorithme en $O(n^4)$

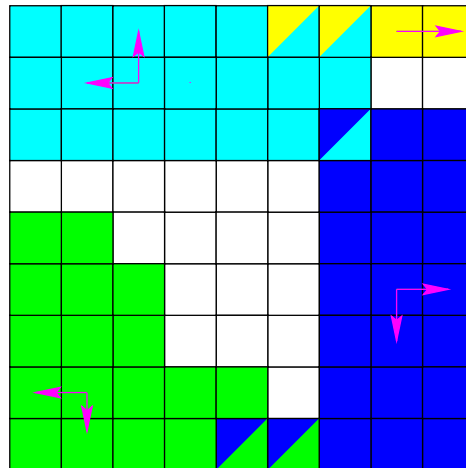
$\underbrace{\text{pour tout } k, l :}_{O(n^2)} \underbrace{\text{vérifier si } F_{k,l} \text{ est satisfiable}}_{O(n^2)}$

Décomposition en regions



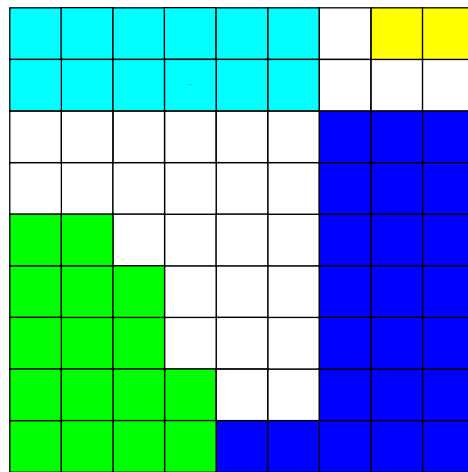
Coins

$$Cor = \bigwedge_{i,j} \left\{ \begin{array}{ll} A_{i,j} \Rightarrow A_{i-1,j} & A_{i,j} \Rightarrow A_{i,j-1} \\ B_{i,j} \Rightarrow B_{i-1,j} & B_{i,j} \Rightarrow B_{i,j+1} \\ C_{i,j} \Rightarrow C_{i+1,j} & C_{i,j} \Rightarrow C_{i,j-1} \\ D_{i,j} \Rightarrow D_{i+1,j} & D_{i,j} \Rightarrow D_{i,j+1} \end{array} \right\}$$



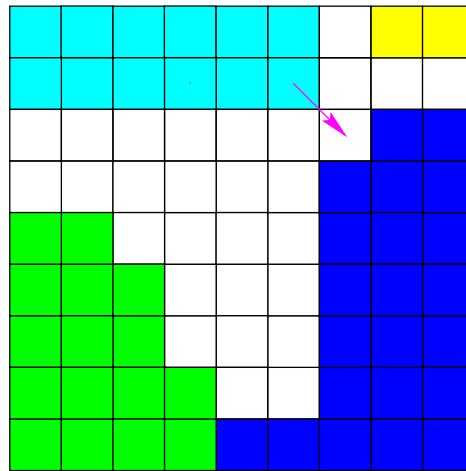
Régions disjointes

$$Dis = \bigwedge_{i,j} \{X_{i,j} \Rightarrow \overline{Y}_{i,j} : \text{ pour des symboles distincts } X, Y \in \{A, B, C, D\}\}$$



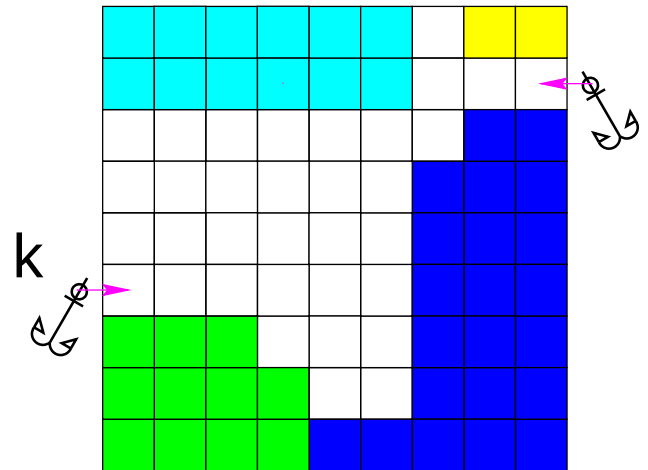
Ensemble connexe

$$Con = \bigwedge_{i,j} \{A_{i,j} \Rightarrow \overline{D}_{i+1,j+1} \quad B_{i,j} \Rightarrow \overline{C}_{i+1,j-1}\}$$



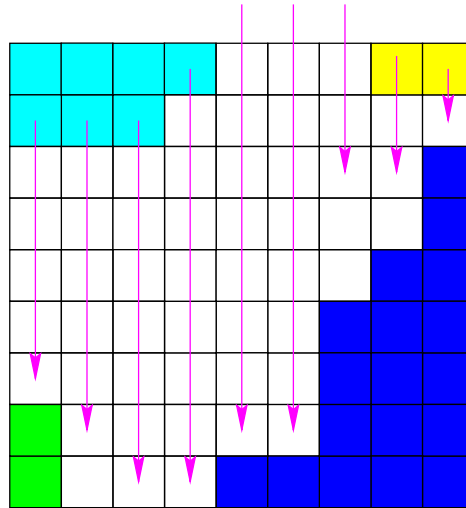
Ancres

$$Anc = (\overline{A}_{k,1} \wedge \overline{B}_{k,1} \wedge \overline{C}_{k,1} \wedge \overline{D}_{k,1}) \wedge (\overline{A}_{l,n} \wedge \overline{B}_{l,n} \wedge \overline{C}_{l,n} \wedge \overline{D}_{l,n})$$



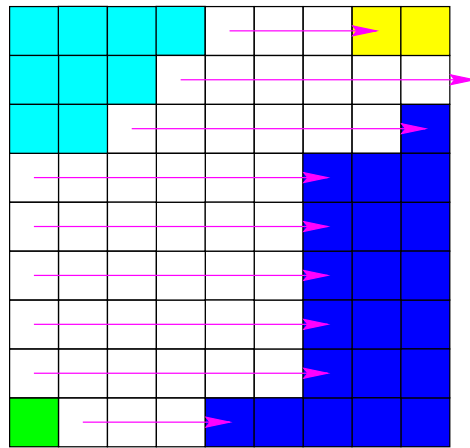
Bornes inférieures sur les projections sur les colonnes

$$\begin{aligned}
 LBC &= \bigwedge_{i,j} \{ (A_{i,j} \vee B_{i,j}) \Rightarrow (\overline{C}_{i+c_j,j} \wedge \overline{D}_{i+c_j,j}) \} \wedge \bigwedge_j \{ \overline{C}_{c_j,j} \quad \overline{D}_{c_j,j} \} \\
 &= \bigwedge_{i,j} \left\{ \begin{array}{ll} A_{i,j} \Rightarrow \overline{C}_{i+c_j,j} & A_{i,j} \Rightarrow \overline{D}_{i+c_j,j} \\ B_{i,j} \Rightarrow \overline{C}_{i+c_j,j} & B_{i,j} \Rightarrow \overline{D}_{i+c_j,j} \end{array} \right\} \wedge \bigwedge_j \{ \overline{C}_{c_j,j} \quad \overline{D}_{c_j,j} \}
 \end{aligned}$$



Bornes supérieures sur les projections sur les lignes

$$\begin{aligned}
 UBR &= \bigwedge_{i,j} \{ (\overline{A}_{i,j} \wedge \overline{C}_{i,j}) \Rightarrow (B_{i,j+r_i} \vee D_{i,j+r_i}) \} \\
 &= \bigwedge_j \left\{ \begin{array}{ll} \bigwedge_{i \leq \min\{k,l\}} \overline{A}_{i,j} \Rightarrow B_{i,j+r_i} & \bigwedge_{k \leq i \leq l} \overline{C}_{i,j} \Rightarrow B_{i,j+r_i} \\ \bigwedge_{l \leq i \leq k} \overline{A}_{i,j} \Rightarrow D_{i,j+r_i} & \bigwedge_{\max\{k,l\} \leq i} \overline{C}_{i,j} \Rightarrow D_{i,j+r_i} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$



Réduction

$$F_{k,l} = Cor \wedge Dis \wedge Con \wedge Anc \wedge LBC \wedge UBR$$

Thm Il y a une solution ancrée en k, l ssi $F_{k,l}$ est satisfiable.

Idée Supposons que $F_{k,l}$ soit satisfaite. Soit

$T = \overline{A \vee B \vee C \vee D}$ alors

$$\sum_i r_i \geq \sum_i rowsum_i(T) = \sum_j colsum_j(T) \geq \sum_j c_j.$$

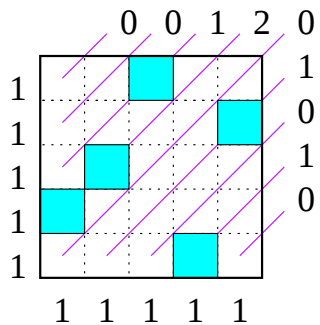
T est une solution, car nous avons supposé $\sum_i r_i = \sum_j c_j$

Solutions multiples

			x	y		$\bar{x}$	$\bar{y}$	
	$\bar{y}$						y	
$\bar{x}$						x		
x	y		$\bar{x}$	$\bar{y}$				

$$x \Rightarrow y$$

Matrices de permutations



Autre formulation Etant donné $C \in \mathbb{N}^n$ existe-t-il des permutations $\pi, \sigma \in S_n$ tq $C = \sigma + \pi$

0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8
	0	1	2	3	4

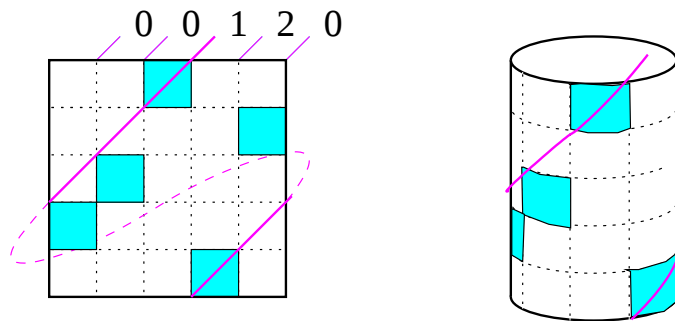
$$\sigma = 2, 1, 0, 4, 3$$

$$\pi = 0, 2, 3, 1, 4$$

$$C = 2, 3, 3, 5, 7$$

Ce pb est NP-complet par [Yu Wenci, 1996]

Sur un cylindre



Autre formulation Etant donné $C \in \mathbb{N}^n$ existe-t-il des permutations $\pi, \sigma \in S_n$ tq $C = \sigma + \pi \pmod{n}$

$$\sigma = 0, 2, 4, 1, 3 + \pmod{n}$$

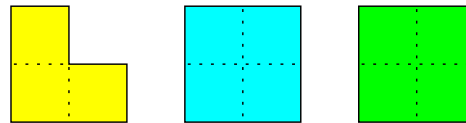
$$\pi = 1, 4, 3, 2, 0$$

$$C = 1, 1, 2, 3, 3$$

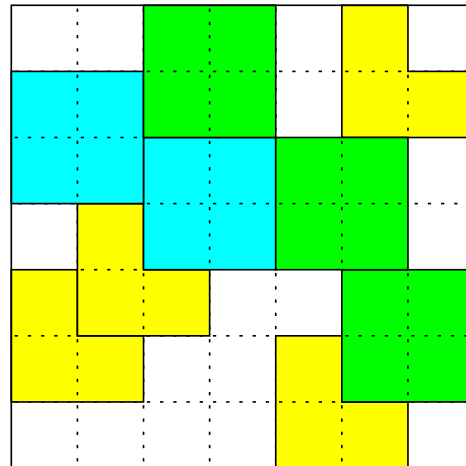
On peut résoudre ce problème en temps $O(n^2)$ en utilisant le théorème de Hall [Nivat, 2000]

Pavages

Fixons une séquence de pavés.

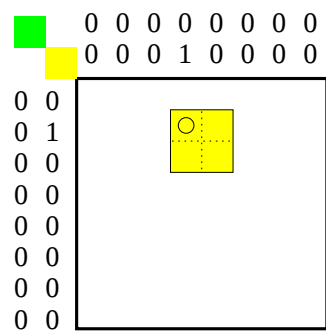
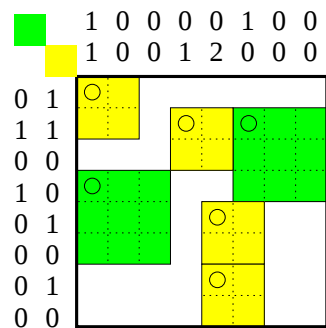


Un pavage d'une grille est un ensemble non-recouvrant de copies de ces pavés, translatés mais pas tournés, et inclus dans la grille.

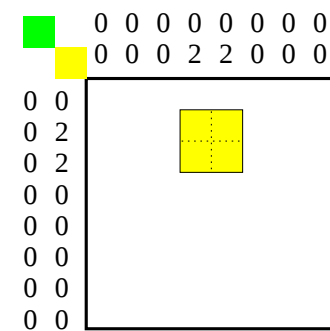
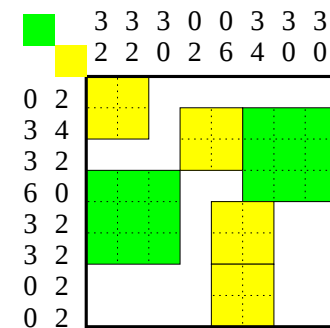


Deux types de projections équivalents

projections des centres



projections des cellules

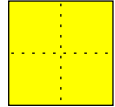
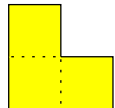
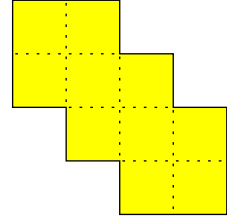


Pour les deux types on a

- $proj(A \cup B) = proj(A) + proj(B)$
- $\{proj(A) : A \text{ a un seul pavé}\}$ forme une base

Il y a une bijection entre les deux types de projections

Complexité pour un type de pavé

type de pavé	complexité	référence
	$O(n \log n)$	[Ryser' 1957]
	$O(n^2)$	[Dürr, Goles, Rapaport, Rémila, 2000] et [Picouleau, 1999]
	$\geq$ "2 atomes"	[Chrobak, Couperus, D, Woeginger, 2002]
	NP-complet	[Chrobak. . . , 2002]
	NP-complet	[Chrobak. . . , 2002]

Complexité pour plusieurs types de pavé

type de pavé	complexité	référence
$\left\{ \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array} \right\}$	ouvert	"Pb des 2 atomes"
$\left\{ \begin{array}{ c c } \hline \text{■} & \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c c } \hline \text{■} & \text{■} \\ \hline \end{array} \right\}$	NP-complet	[Chrobak. . . ,2002]
$\left\{ \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array} \right\}$	$\geq$ "2 atomes"	(clairement)
$\left\{ \begin{array}{ c c } \hline \text{■} & \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array} \right\}$	NP-complet	[Chrobak. . . ,2002]
$\left\{ \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c c } \hline \text{■} & \text{■} \\ \hline \end{array} \right\}$	NP-complet	[Chrobak. . . ,2002]
$\left\{ \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline \text{■} \\ \hline \end{array} \right\}$	NP-complet	[Chrobak,Dürr,2001]

Réduction du pb de 3 atomes vers un problème de reconstruction de pavage

pb de 3 atomes $\rightarrow$ pb de pavage

cellule

bloc $k \times k$

grille $n \times n$

grille $nk \times nk$

contenu de cellule

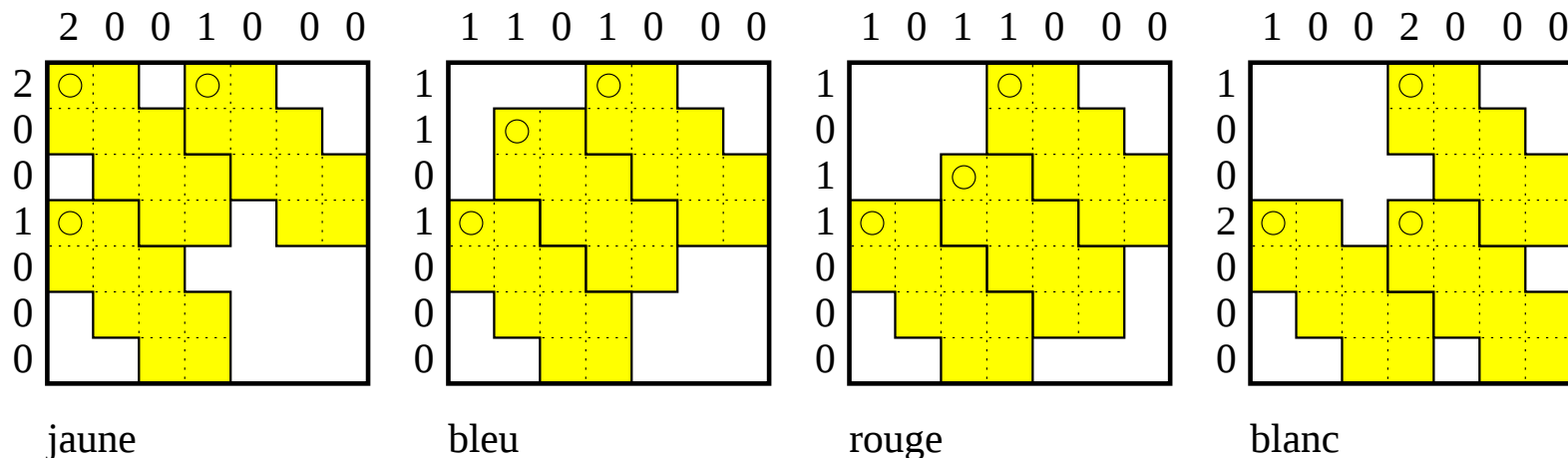
pavage admissible de bloc

différents couleurs

projections (affine) linéairement indépendants

instance $r, c \in \mathbb{N}^n$

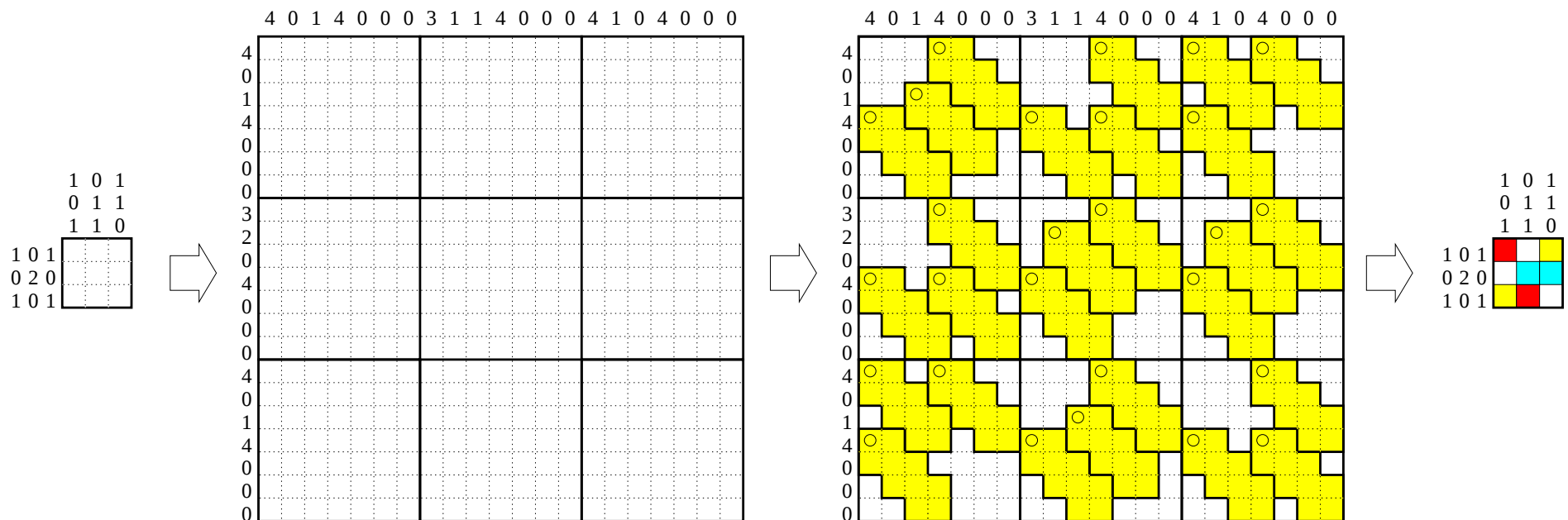
instance $r', c' \in \mathbb{N}^{nk}$



$\langle r, c \rangle$ a une solution ssi $\langle r', c' \rangle$ en a une

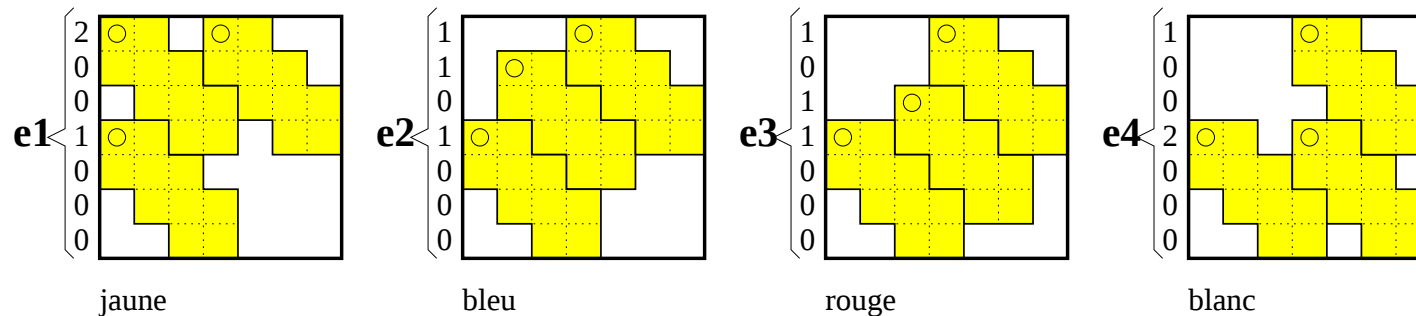
⇒ Par construction

⇐ Montrer que (npc1) chaque bloc n'est pavé que de manière "admissible" et (npc2) aux projections de blocs on peut associer de manière unique des projections de couleurs



Indépendance linéaire (affine)

Projections des pavages admissibles



Projections d'une ligne de blocs

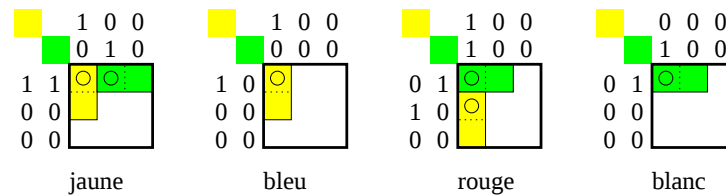
$$(1) \quad c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_4 \mathbf{e}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \left[\begin{array}{c} \text{Grid 1} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Grid 2} \end{array} \right]$$

$$(2) \quad c_1 + \dots + c_4 = n$$

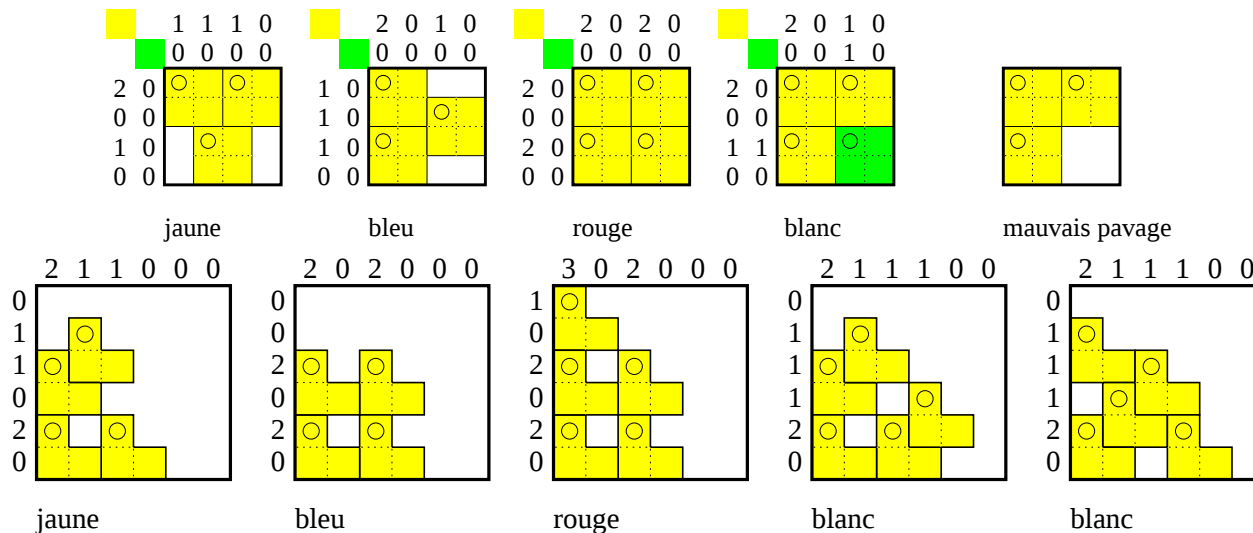
Les coefficients $c_1, \dots, c_4$ sont spécifiés de manière unique si $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ sont affine linéairement indépendants.

Autres réductions

Nécessite l'indépendance linéaire *affine* pour (npc2)

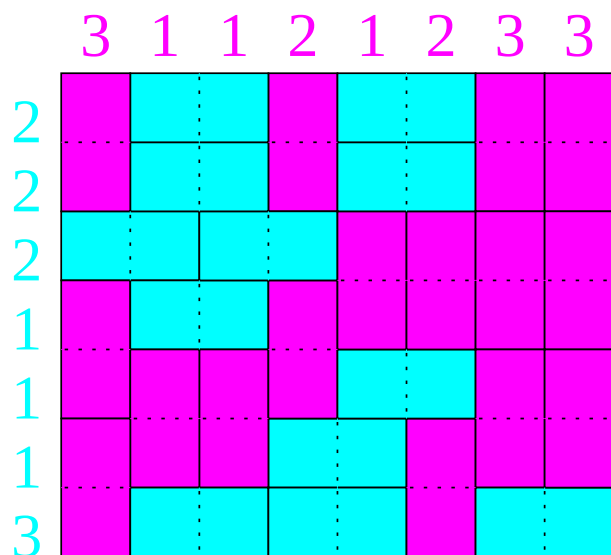


Plus difficile de montrer (npc1)



Problèmes ouverts fameux

Reconstruire des pavages de dominos complets



Problème des deux atomes

