THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité :

INFORMATIQUE

par

Clémence MAGNIEN

Titre de la thèse :

Étude du modèle du tas de sable abélien : points de vue algorithmique et algébrique

Soutenue le 6 mai 2003 devant le jury composé de :

M.	Jean-Paul Allouche	Examinateur
M.	Robert Cori	Directeur
M.	Jens Gustedt	Rapporteur
M.	Michel Habib	Rapporteur
M.	Jacques Mazoyer	Examinateur
M.	Michel Morvan	Directeur

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, au cours de ma thèse, m'ont aidé d'une façon ou d'une autre. Les premières d'entre elles sont bien sur mes directeurs de thèse, Robert Cori et Michel Morvan, qui m'ont introduit au monde de la recherche et qui ont su me le faire apprécier. Michel a encadré principalement la première partie de ma thèse au LIAFA, et Robert la seconde partie au LIX. Tous deux ont su me faire partager leur enthousiasme pour leurs thèmes de recherche, et me faire profiter de leur expérience et de leurs conseils aux moments où j'en ai eu besoin.

Je remercie vivement Jens Gustedt et Michel Habib qui ont accepté de se plonger dans mon mémoire pour en faire un rapport, qui m'ont donnés des conseils pour l'améliorer. Je remercie également Jacques Mazoyer et Jean-Paul Allouche qui ont accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu au cours de ma thèse l'occasion de collaborer avec plusieurs personnes, dont l'aide m'a été très précieuse.

Je tiens à remercier très sincèrement Matthieu Latapy, qui a participé de près ou de loin à la plupart de mes travaux, et qui m'a apporté son soutien et m'a encouragée à de très nombreuses reprises. J'espère avoir réussi à lui rendre une partie de l'aide qu'il m'a apportée.

Je remercie également Ha Duong Phan, que j'ai beaucoup sollicitée pendant mon stage de DEA et le début de ma thèse, et qui m'a aidé à commencer ma thèse du bon pied.

J'ai également eu l'occasion de collaborer avec Dominique Rossin, Laurent Vuillon et Arnaud Dartois, qui ont été chacun à leur manière des compagnons de travail sympathiques.

De nombreuses personnes ont eu la gentillesse de m'accorder un peu de leur temps, pour m'éclairer sur le fonctionnement parfois complexe du monde de la recherche, pour me donner des conseils, pour m'encourager parfois ou simplement pour le plaisir de discuter. Je peux citer, parmi beaucoup d'autres, Jean-Éric Pin, Daniel Krob, Jacques Mazoyer, Jean-Marc Steyaert, Jean-Pierre Jouannaud, Michel Habib, Michel Weinfeld, Claire Kenyon, Jean Mairesse et Christiane Frougny. J'ai énormément appris à leur contact et je les en remercie profondément.

J'ai rencontré de nombreuses personnes au cours de ma thèse avec lesquelles je n'ai pas directement travaillé, mais qui m'ont toutes apporté quelque chose et qui ont contribué à faire de mon travail de thèse un travail agréable.

Parmi celles-ci figurent toutes les personnes avec qui j'ai partagé un bureau pendant plus ou moins longtemps : Jean-Christophe Novelli, Marc Espie, Jean-François Antoniotti, Matthieu Latapy, Sébastien Desreux, Frédéric Chavanon, Jean-Loup Guillaume, Arnaud Dartois, Nicolas Gurel, Ada Suk-Fuk Ng, Hugues Verdure et Fanny Pascual. Je les remercie d'avoir réussi à me supporter avec bonne humeur.

Noëlle Delgado m'a toujours aidée dans mes démarches administratives au LIAFA avec beaucoup d'efficacité et de gentillesse. J'ai également eu toujours beaucoup de plaisir à discuter avec elle, et sa capacité de plaisanter des diverses difficultés que nous pouvions rencontrer m'a aidée à garder le moral à de nombreuses occasion.

Ils reste beaucoup de personnes que je n'ai pas encore citées, qui ont participé aux divers aspects de mon travail de recherche, et que je tiens à remercier. En voici quelques unes : Laifa Ahmadi, Sylvain Baro, Beshad Behzadi, Catherine Bensoussan, Karell Bertet, Simon Bliudze, Luc Boasson, Mireille Bousquet-Mélou, Nathalie Caspard, Marianne Delorme, Nicolas Destainville, Jérôme Durand-Lose, Isabelle Fagnot, Nazim Fatès, Eric Goles, Isabelle Guérin-Lassoux, Matthieu Guionnet, Yan Jurski, Ines Klimann, Houy Kuoy, Dmitri Lebedev, Bruno Martin, Fabien de Montgolfier, Anne Micheli, Bertrand Nouvel, Nicolas Ollinger, Elias O'Regan, Christophe Papazian, Natacha Portier, Dominique Poulalhon, Christophe Prieur, Éric Rémila, Évelyne Rayssac, Magalie Renard, Jean-Marie Rifflet, Zoubir Sami, Nicolas Schabanel, Gilles Schaeffer, Éric Thierry, Emmanuel Thomé, Tayssir Touili, Ekaterine Vassilieva, Jérôme Waldispühl et Jean-Baptiste Yunès,

J'ai certainement oublié de citer de nombreuses personnes dans ces remerciements. Je les remercie d'autant plus vivement si elles ont la gentillesse de me le pardonner.

Table des matières

Introduction

Cette thèse s'intéresse à une famille de modèles dynamiques discrets construite autour de certains modèles de tas de sable. Les premiers de ces modèles ont été introduits en physique comme des modèles types du phénomène d'*auto-organisation critique* (*self-organized criticality* ou SOC) [3, 29].

La SOC [36, 62, 2] est une propriété constatée dans de nombreux phénomènes physiques, comme le climat ou la techtonique des plaques, ou dans notre cas les avalanches. Elle décrit la capacité d'un système à évoluer, quelles que soient les conditions extérieures, vers des états dits *critiques*. Un tel état est caractérisé par le fait que son évolution sous l'action de petites perturbations locales est très difficile à prévoir.

La SOC peut se comprendre de façon intuitive en prenant l'exemple d'un tas de sable posé sur une table (si des grains tombent de la table ils disparaissent du système). Si le tas est au repos et que sa pente est très faible, lorsqu'on ajoute une toute petite quantité de sable sur la table, très peu de grains vont s'ébouler : la taille de la perturbation est faible. Si, au contraire, la pente du tas est très forte, lorsqu'on ajoute une petite quantité de sable il est certain que l'avalanche qui en découle touche tout le système : la taille de la perturbation est très importante.

Entre ces deux extrêmes, il existe une valeur critique de la pente du tas pour laquelle le comportement du système après l'ajout d'une petite quantité de sable varie grandement : des avalanches de toutes les tailles sont susceptibles de se produire, et on ne peut pas caractériser facilement les états qui donnent lieu à une avalanche d'une taille donnée. Ce sont les *états critiques*. Ils sont égalemnent caractérisés par le fait que la taille des avalanches suit une loi de puissance, c'est-à-dire que la probabilité qu'une avalanche soit de taille k est proportionnelle à $k^{-\alpha}$ [18, 3]. Ceci signifie que, bien que les avalanches de très grande taille soient beaucoup moins nombreuses que celles de petite taille, elles se produisent néanmoins avec une fréquence non négligeable.

Si l'on considère maintenant une table sur laquelle il n'y a aucun grain de sable, alors si l'on verse très lentement du sable sur la table, le système évolue vers un état critique. Au début la pente du tas est nulle, et au fur et à mesure qu'on ajoute du sable elle grandit petit à petit, jusqu'à atteindre la pente critique. Si à un moment la pente dépasse la pente critique, une grande avalanche se produit, et la pente décroit pour redevenir critique. Le système évolue ainsi vers un état critique quelles que soient les conditions extérieures (ici l'endroit où l'on ajoute le sable) : c'est un modèle de SOC.

Plusieurs modèles proches ont ensuite été introduits et étudiés dans plusieurs disciplines, notamment en physique [23, 35], en sciences sociales [7, 8] et en informatique [12, 30]. L'un de ces modèles, le Chip Firing Game [12, 11] joue un rôle particulier en raison de ses caractéristiques générales [42].

Plusieurs axes d'étude ont été développés pour ces modèles. Nous nous sommes intéressés principalement à deux d'entre eux.

D'un côté, l'étude de certains modèles de piles de sable à base de partitions d'entiers, dont le Chip Firing Game est une généralisation naturelle, a principalement porté sur l'étude de l'ensemble des configurations atteignables du modèle à partir d'une configuration initiale donnée, appelé *espace des configurations* du modèle [14, 29, 32, 33]. Il a été montré que dans de nombreux cas, cet ensemble peut être naturellement ordonné comme un treillis. La question de comprendre pourquoi les treillis apparaissent dans ce contexte se pose alors, ainsi que de caractériser les différentes classes de treillis engendrés par les différents modèles [45, 34].

D'un autre côté, le modèle du tas de sable abélien a été intensivement étudié pour ses propriétés algébriques [23, 46, 35]. L'ensemble des configurations récurrentes ou critiques du modèle a en effet la propriété de former un groupe pour l'addition. Les questions principales qui ont été étudiées à ce sujet sont de déterminer la structure du groupe [25, 17], ou d'autres propriétés des configurations récurrentes en général [13, 18].

Le principal objectif de cette thèse est de montrer en quoi ces deux approches sont complémentaires. Pour ce faire, nous étudions dans un premier temps la structure des espaces des configurations des CFG et d'autres modèles similaires, utilisant pour cela, entre autres, la théorie des ordres et des treillis. Nous développons dans ce contexte des outils et des techniques pour caractériser et manipuler les ensembles que nous avons considérés. Dans un deuxième temps, nous appliquons ces outils et ces techniques à l'étude des configurations récurrentes du modèle du tas de sable abélien. Nous utilisons pour cela deux techniques différentes. Tout d'abord, nous décelons dans certains ensembles de configurations des structures d'ordres, ce qui nous permet d'appliquer les connaissances développées auparavant pour les étudier. Ensuite, nous utilisons certains résultats provenant de l'étude des modèles dynamiques discrets et de leurs espaces des configurations pour l'étude de certaines configurations particulières du modèle du tas de sable abélien.

Ce mémoire est organisé comme suit : la première partie présente les rappels nécessaire à l'étude de ces modèles, puis les différents modèles qui sont étudiés dans la suite. Le chapitre 1 contient les rappels généraux, en combinatoire et en algèbre, et notamment les notions d'ensembles ordonnés, de treillis, et de groupe. Une section est consacrée à la définition de ce que nous appelons, dans le cadre de ce mémoire, un modèle dynamique discret. Le chapitre 2 concerne différents modèles de piles de sable, la plupart étant des modèles sur des partitions d'entiers, ainsi que le lien entre ces modèles et la notion de treillis. L'accent est mis sur un modèle particulier, le Chip Firing Game (CFG), qui joue un rôle central parmi tous ces modèles. Dans le chapitre 3, nous présentons le modèle du tas de sable abélien, ainsi que ses principales propriétés algébriques.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du Chip Firing Game, et de la structure des espaces des configurations de ce modèle. Dans le chapitre 4, nous montrons que ces ensembles ont une structure de treillis, et que l'ensemble des treillis engendrés par ce modèle est compris entre les classes très connues des treillis distributifs et des treillis supérieurement localement distributifs (SLD). Nous présentons également une extension du modèle, le Chip Firing Game *coloré*, qui engendre exactement la classe des treillis SLD. Le chapitre 5 est consacré à l'étude d'autres modèles similaires, et à la comparaison de leur pouvoir d'expression avec celui du CFG.

La troisième partie est consacrée à l'étude du modèle du tas de sable abélien. Le chapitre 6 présente une étude sur différentes structures d'ordre qui ont été mises en évidence sur les configurations récurrentes du modèle, ainsi qu'une extension infinie de l'algorithme thermique, qui est l'algorithme utilisé pour calculer certaines configurations récurrentes du modèle. Le chapitre 7 concerne l'étude d'une configuration récurrente particulière du modèle sur la grille, et présente une conjecture sur la forme de cette configuration.

La plupart des résultats présentés dans cette thèse sont nés de discussions, et sont issus de collaborations avec d'autres chercheurs, en particulier Robert Cori, Arnaud Dartois, Matthieu Latapy, Michel Morvan, Ha Duong Phan, Dominique Rossin et Laurent Vuillon. Les résultats des chapitres 4 et 5 ont fait l'objet de publications dans des journaux [38, 44, 34] et dans des conférences [45, 43]. Les résultats du chapitre 7 ont fait l'objet d'une publication dans les actes d'une conférence [19].

Première partie

Rappels et contexte

Chapitre 1

Rappels généraux

Dans ce chapitre nous présentons les différentes notions utilisées dans la suite de ce mémoire. Nous commençons par rappeler les principales notions et résultats concernant les graphes, les ensembles partiellement ordonnés et les treillis, puis nous précisons ce que nous entendons par le terme *modèle dynamique discret*, pour finir par les approches que nous utilisons pour les étudier.

1.1 Relations et graphes

Une *relation* binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est un sous-ensemble de $E \times E$. Si (x, y) est un élément de la relation, on dit que x est en relation avec y et on le note $x\mathcal{R}y$.

Une relation binaire est dite *réflexive* si, pour tout x dans E, $x\mathcal{R}x$. Une relation est dite *symétrique* si, pour tous x, y dans E, $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$. Une relation est dite *transitive* si, pour tous x, y, z dans E, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ implique $x\mathcal{R}z$. Une relation est une *relation d'équivalence* si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Étant donnés une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E et un élément x de E, la *classe d'équivalence* de x est l'ensemble des éléments y de E tels que $x\mathcal{R}y$. Notons que x appartient toujours à sa classe d'équivalence. L'ensemble de toutes les classes d'équivalence forme une partition de E. On notera $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. On désignera souvent une classe d'équivalence par un de ses éléments particuliers. On appellera cet élément le *représentant* de la classe.

Un *graphe orienté* $G = (V, E)$ est constitué d'un ensemble V de sommets et d'une relation binaire E sur V. Les éléments de E sont appelés les *arcs* du graphe. Si (x, y) est un arc du graphe, on dit que x est l'*origine* et que y est l'*extrémité* de cet arc. On dit également que l'arc (x, y) est un arc *sortant* pour x et un arc *entrant* pour y, et que cet arc est *adjacent* à x et à y. Un sommet qui n'a aucun arc entrant est appelé une *source*. Un sommet qui n'a aucun arc sortant est appelé un *puits*.

Un graphe $G = (V, E)$ *non orienté* est défini comme un graphe orienté, à la différence que les éléments de E sont des paires non ordonnées de sommets. Un élément de E est alors appelé une *arête*. Si deux sommets d'un graphe non orienté sont reliés par une arête, on dit qu'ils sont *voisins*.

Un *multi-graphe* non-orienté (resp. orienté) est défini comme un graphe non-orienté (resp. orienté), à la différence qu'il peut y avoir plusieurs arêtes (resp. arcs) entre deux mêmes sommets. Tous les graphes que nous considérons sont finis.

Si deux arcs ont un sommet en commun, on dit qu'ils sont *adjacents*.

On appelle *degré sortant* (resp. *degré entrant*) d'un sommet x dans un graphe orienté, que l'on note $d^-(x)$ (resp. $d^+(x)$), le nombre d'arcs (x, y) (resp. (y, x)). Le *degré* d'un sommet x, noté $d(x)$, est la somme de ses degrés entrants et sortants dans le cas d'un graphe orienté. Le degré d'un sommet x dans un graphe non-orienté est le nombre d'arêtes adjacentes à x.

Une *chaîne* (resp. un *chemin*) dans un graphe non orienté (resp. orienté) est une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ de sommets du graphe telle que, pour tout $1 \leq i < n$, (x_i, x_{i+1}) est une arête (resp. un arc) du graphe. Un *cycle* (resp. *circuit*) est une chaîne (resp. un chemin) dont le premier et le dernier sommet sont les mêmes. On désignera un cyle (resp. circuit) indifféremment pas l'ensemble des sommets ou l'ensemble des arêtes (resp. arcs) qui le composent. Si x et y sont tels qu'il existe un chemin de x vers y, alors x est un *prédécesseur* de y et y est un *successeur* de x. Si ce chemin est constitué d'un seul arc, on dit que x est un *prédécesseur immédiat* de y et que y est un *successeur immédiat* de x.

La *clôture transitive* d'un graphe $G = (V, E)$ (ou d'une relation E) est le graphe $G' = (V, E')$ contenant G défini par :

$$E' = E \cup \{(x, y) | y \text{ est un successeur de } x\}$$

La *clôture réflexive* d'un graphe $G = (V, E)$ (ou d'une relation E) est le graphe $G' = (V, E')$ contenant G défini par :

$$E' = E \cup \{(x, x)\}$$

Étant donnés deux sommets x et y d'un multi-graphe, on notera $d(x, y)$ le nombre d'arêtes entre x et y si le graphe est non orienté, ou le nombre d'arcs de x vers y s'il est orienté.

Une *boucle* est un arc ou une arête qui a le même sommet a ses deux extrémités.

Un graphe est un graphe *planaire* s'il existe un moyen de le dessiner dans le plan sans que deux arêtes se croisent. Faire un tel dessin d'un graphe sépare le plan en plusieurs régions connexes, dont une est infinie. Ces régions sont appelées les *faces* du graphe.

Si G est un graphe planaire dessiné dans le plan, alors le *graphe dual* G^* de G est le graphe dont les sommets sont les faces de G, et tels que deux sommets sont voisins l'un de l'autre si les faces correspondantes sont adjacentes à une même arête. Voir la figure 1.1 pour un exemple d'un graphe planaire et de son dual.

Une *composante connexe* d'un graphe est un ensemble maximal pour l'inclusion de sommets X tel que, pour toute paire de sommets x, y dans X, il existe un chemin de x vers y. Un graphe est dit *connexe* s'il est composé d'une seule composante connexe. Une *composante fortement connexe* d'un graphe orienté est un ensemble maximal pour

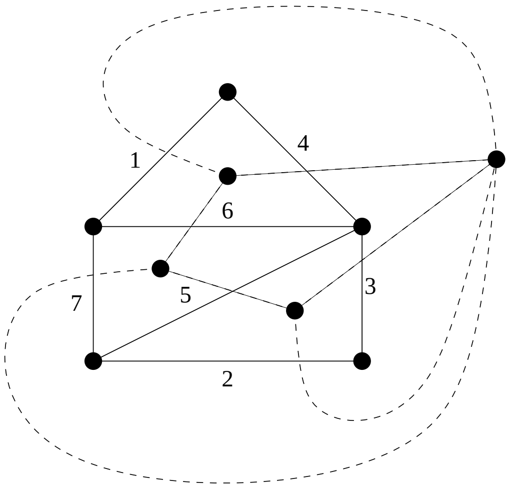


FIG. 1.1 – *Un graphe planaire (traits pleins) et son dual (traits pointillés)*

l'inclusion de sommets X tel que, pour toute paire x, y de sommets de X, il existe un chemin de x vers y et un chemin de y vers x. Un graphe est *fortement connexe* s'il est composé d'une seule composante fortement connexe.

Définition 1.1 (Composantes fermées)
Une composante fermée *d'un multigraphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble strict S de V non réduit à un élément et tel que :*
- *S est une composante fortement connexe, et*
- *il n'y a aucun arc d'un sommet de S vers un sommet de $V \setminus S$ (S est* fermé*).*

Un *sous-graphe* d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Si $V' = V$, G' est appelé un sous-graphe *couvrant* de G. Si W est un sous-ensemble de V, alors le sous-graphe de G *induit par* W est le sous-graphe de G obtenu en prenant les sommets de W et les arêtes de G existant entre ces sommets.

Une *coupure* d'un graphe connexe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq E$ des arêtes de G tel que le sous-graphe $(V, E \setminus C)$ de G n'est pas connexe. Une coupure C est dite *minimale* s'il n'existe aucun sous-ensemble strict de C qui soit une coupure. On remarquera que dans le cas d'un graphe planaire, une coupure contient nécessairement un cycle du graphe dual. Par exemple, pour le graphe de la figure 1.1, les arêtes 3,5 et 7 forment une coupure.

Un *arbre* est un graphe non orienté connexe et sans cycles. Un *arbre couvrant* d'un graphe G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.

Soit G un graphe connexe, et soit ν une numérotation des arêtes de G de 1 à m. Soit A un arbre couvrant de G, dont les arêtes sont $E(A)$. Toute arête e de G qui n'est pas dans A forme avec certaines arêtes de A un unique cycle. On dit que l'arête e est *externe active* pour A (pour la numérotation ν) si e a le plus petit numéro parmi les arêtes de l'unique cycle de $\{e\} \cup E(A)$. Toute arête e de A forme avec les arêtes de $E \setminus E(A)$ une coupure.

Cette coupure n'est pas nécessairement minimale. On dit que l'arête e est *interne active* pour A (pour la numérotation ν) si e est la plus petite arête (pour la numérotation) de l'unique coupure minimale contenue dans $\{e\} \cup E \setminus E(A)$. L'*activité externe* (resp. *activité interne*) de A est le nombre d'arêtes externes actives (resp. internes actives) de A. On note $\mathrm{Ext}(A)$ (resp. $\mathrm{Int}(A)$) l'ensemble des arêtes externes actives (resp. internes actives) de A. Par exemple, pour le graphe de la figure 1.1, l'arbre couvrant formé par les arêtes 1, 3, 5 et 6 a pour arête interne active l'arête 2, et pour arête externe active l'arête 1.

Les arbres couvrants d'un graphe ont été intensivement étudiés [64, 63]. Ils présentent entre autres des liens avec le nombre de façon de colorier un graphe. Le théorème suivant est une version simplifiée du théorème de Tutte [63].

Théorème 1.2 *Soit G un graphe connexe. Le nombre d'arbres couvrants de G d'activité externe (resp. interne) donnée a_e (resp. a_i) ne dépend pas de la numérotation choisie pour les arêtes.*

1.2 Groupes

Soit E un ensemble et $+$ une *loi de composition interne* sur E, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans E. La loi $+$ est dite :
- *associative* si $(x + y) + z = x + (y + z)$ pour tous x, y, z dans E ;
- *commutative* si $x + y = y + x$ pour tous x, y dans E.

On dit que e est un *élément neutre* dans $(E, +)$ si $x+e = e+x = x$ pour tout x dans E. Si E possède une élément neutre, il est nécessairement unique. On notera 0_E cet élément. Si deux éléments tels que $x + y = y + x = 0_E$, alors x et y sont *opposés* l'un de l'autre. L'opposé d'un élément est nécessairement unique. On notera $-x$ l'opposé de x.

Définition 1.3 (Groupe) *Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $+$. G est un* groupe *relativement à cette loi si :*
- *la loi $+$ est associative ;*
- *$(G, +)$ possède un élément neutre ;*
- *tout élément de $(G, +)$ a un opposé.*

Définition 1.4 (Groupe abélien, groupe commutatif) *Un groupe G est dit* abélien *ou* commutatif *si la loi $+$ est commutative.*

On remarque que $\mathbb{Z}^n$ muni de l'addition est un groupe abélien.

Définition 1.5 (Sous-groupe) *Soit G un groupe. Un sous-ensemble non vide H de G est un* sous-groupe *de G si :*
- *pour tous x, y dans H, $x + y \in H$;*
- *pour tout x dans H, $-x \in H$. Ces deux conditions impliquent que 0_E est un élément de H.*

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $+$ commutative, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. La relation $\mathcal{R}$ est *compatible* avec la loi $+$ si pour tous x, x', y, y' dans E, $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$ implique $(x+y)\mathcal{R}(x'+y')$.

Si la relation d'équivalence est compatible avec la loi du groupe, alors l'ensemble $G/\mathcal{R}$ est un groupe également, appelé *groupe quotient* de G par rapport à la relation $\mathcal{R}$.

Définition 1.6 (isomorphisme de groupes) *Deux groupes $(G, +_G)$ et $(G', +_{G'})$ sont* isomorphes *s'il existe une bijection f de G dans G' satisfaisant :*
- $f(0_G) = 0_{G'}$ *;*
- *pour tout x dans G, $f(-x) = -f(x)$*
- *pour tous x, y dans G, $f(x +_G y) = f(x) +_{G'} f(y)$.*

1.3 Ensembles partiellement ordonnés

Nous présentons dans cette section les définitions et les résultats classiques de la théorie des ordres. Pour plus de détails, voir par exemple [21].

Définition 1.7 (Ordre) *Un* ensemble partiellement ordonné *ou* ordre *S est un ensemble muni d'une relation $\leq$ qui est à la fois réflexive (pour tout x dans S, $x \leq x$), transitive ($x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$) et anti-symétrique ($x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$).*

Tous les ensembles partiellement ordonnés que nous considérons sont finis.

Si x et y sont deux éléments d'un ensemble partiellement ordonné S tels que $x \leq y$, alors on dit que x est *plus petit que* y, ou inversement que y est *plus grand que* x. Si $x \leq y$ et $x \neq y$, alors on dit que x est *strictement* plus petit que y, et on le note $x < y$. Un élément x *est couvert par* un autre élément y (ou y *couvre* x) si $x \leq y$ et $x < z \leq y$ implique $z = y$. On dit alors que y est une *couverture supérieure* de x, ou de façon équivalente que x est une *couverture inférieure* de y, et on le note $x \prec y$, ou $y \succ x$. De façon intuitive, x est couvert par y si x est strictement plus petit que y et s'il n'y a aucun élément entre x et y. Si x et y sont tels que x n'est ni plus petit, ni plus grand que y, alors on dit que x et y sont *incomparables*, et on le note $x|y$.

Soit O un ensemble partiellement ordonné. Les éléments *maximaux* (resp. *minimaux*) d'une partie X de O sont les éléments x tels que, pour tout $y \in X$, $x \not< y$ (resp. $y \not< x$). Si X a un unique élément maximal (resp. minimal), on appelle cet élément le *plus grand* (resp. *plus petit*) élément de X.

Si x et y sont deux éléments tels que $x \prec y$, on dira que x est un *prédécesseur immédiat* de y, et que y est un *successeur immédiat* de x. Si x et y sont tels que $x \leq y$, on dira que x est un *prédécesseur* de y, et que y est un *successeur* de x. Remarquons que la relation de prédécesseur (resp. successeur) est la clôture réflexive et transitive de la relation de prédécesseur immédiat (resp successeur immédiat).

Pour représenter un ensemble partiellement ordonné O, on utilisera son *diagramme de Hasse*, défini de la façon suivante : on associe à chaque élément x de O un point p_x du plan, tel que :

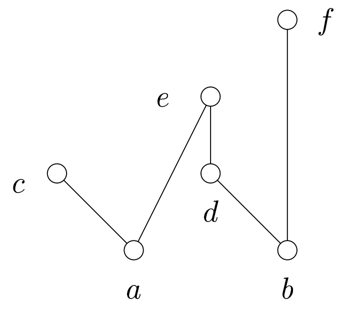


FIG. 1.2 – Un ensemble partiellement ordonné représenté par son diagramme de Hasse. a est plus petit que c et e. b est plus petit que d, e et f. d est plus petit que e.

– si $x \leq y$ alors p_x est plus bas que p_y, et
– il y a une ligne droite entre p_x et p_y si et seulement si y couvre x ou x couvre y.

La figure 1.2 montre un exemple d'un ensemble partiellement ordonné représenté par son diagramme de Hasse.

Si un ensemble ordonné O est tel que tous ses éléments sont deux à deux comparables, alors O est un *ordre total.*

Constatons qu'à partir de toute relation $\mathcal{R}$ sans circuits on peut définir un ordre qui est la clôture transitive et symétrique de cette relation.

Définition 1.8 (Dual) *Le* dual *d'un ordre O est l'ordre O^d défini sur les éléments de O par la relation d'ordre $\leq^d$ donnée par : $x \leq^d y \iff y \leq x$. On obtient donc le diagramme de l'ordre O^d en "renversant" celui de O.*

Si x et y sont deux éléments d'un ensemble ordonné O, alors *l'intervalle d'extrémités x et y*, noté $[x, y]$, est l'ensemble des éléments de O qui sont à la fois plus grands que x et plus petits que y. Notons que si x n'est pas plus petit que y, alors l'intervalle $[x, y]$ est vide.

Définition 1.9 (Isomorphisme d'ordre) *Deux ensembles partiellement ordonnés O et P sont* isomorphes *s'il existe une bijection φ de O dans P telle que, pour tous x, y dans O, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ si et seulement si $x \leq y$.*

Un *idéal* d'un ensemble partiellement ordonné O est un ensemble I tel que, pour tout x de I, $y \leq x$ implique que y est un élément de I. Autrement dit, un idéal est un ensemble fermé pour la relation de prédécesseur. Pour tout x, on note $\downarrow x$ l'ensemble de tous les éléments inférieurs ou égaux à x. Cet ensemble est toujours un idéal. De façon duale, un *filtre* d'un ensemble partiellement ordonné O est un ensemble F tel que, pour tout x de F, $y \geq x$ implique que y est un élément de F.

Définition 1.10 (Ordre induit, sous-ordre, extension) *Étant donné un ensemble ordonné $P = (S, \leq)$ et une partie S' de S, on appelle* ordre induit *sur S' par P l'ordre $P' = (S', \leq)$ où $x \leq y$ dans P' si et seulement si $x \leq y$ dans P.*

Un ordre $P' = (S', \leq)$ est un sous-ordre *de P si pour tous x, y dans S', $x \leq_{P'} y$ implique $x \leq_P y$.*

Une extension *d'un ordre $P = (S, \leq)$ est un ordre P' sur les éléments de S tel que P est un sous-ordre de P'.*

Définition 1.11 (Extension linéaire) *Une* extension linéaire *L d'un ensemble partiellement ordonné O est un ordre total sur les éléments de O compatible avec la relation d'ordre sur O, c'est-à-dire que pour tous x, y de O, $x \leq_O y$ implique $x \leq_L y$.*

Si deux éléments x et y d'un ordre sont tels que l'ensemble des éléments qui sont plus grands (resp. plus petits) que x et que y est non vide et admet un unique plus petit élément s (resp. plus grand élément i), alors s (resp. i) est appelé la *borne supérieure* (resp. la *borne inférieure*) de x et y, et on le note $s = x \vee y$ (resp. $i = x \wedge y$).

Si un ensemble fini X d'éléments d'un ensemble ordonné est tel que l'ensemble des éléments qui sont plus grands (resp. plus petits) que tous les éléments de X admet un unique plus petit (resp. plus grand) élément, on appelle cet élément la borne supérieure (resp. borne inférieure) de X, et on le note $\bigvee X$ (resp. $\bigwedge X$). On appelle également la borne supérieure et la borne inférieure le *supremum* et l'*infimum*.

1.4 Treillis

Les treillis sont des ordres particuliers dont l'étude est une partie importante de la théorie des ordres. De nombreux résutats sur les treillis existent. En particulier, plusieurs classes de treillis ont été définies et apparaissent en informatique, en mathématiques, en physique, et en sciences sociales. Nous présentons dans cette section les résultats dont nous aurons besoin sur les treillis dans la suite de ce mémoire. Pour une introduction plus complète, voir par exemple [20, 15].

Définition 1.12 (Demi-treillis) *Un ensemble partiellement ordonné tel que toute paire d'éléments admet une borne supérieure est un* sup-demi-treillis. *De même, tout ensemble partiellement ordonné tel que toute paire d'éléments admet une borne inférieure est un* inf-demi-treillis. *Les inf- et les sup-demi-treillis sont appelés des* demi-treillis.

Définition 1.13 (Treillis) *Un ensemble partiellement ordonné T est un* treillis *si tout couple d'éléments x et y admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

On remarquera que tout sup-demi-treillis a un unique élément maximal : en effet, si un ensemble ordonné a deux plus grands éléments, alors ces deux éléments n'ont pas de borne supérieure et l'ensemble n'est pas un sup-demi-treillis. De même, tout inf-demi-treillis a un unique plus petit élément. Il s'ensuit naturellement que tout treillis fini a un unique plus petit élément et un unique plus grand élément. Si T est un treillis fini, on note 0_T son plus petit élément et 1_T son plus grand élément.

Définition 1.14 (Isomorphisme de treillis) *Deux treillis T et U sont* isomorphes *s'il existe une bijection φ de T dans U qui respecte la borne inférieure et la borne supérieure, c'est-à-dire, pour tous $x, y \in T$,*
$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$, et $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

On remarquera que, pour un treillis, les notions d'isomorphisme d'ordre et de treillis sont les mêmes, autrement dit, si une fonction φ est une bijection entre un treillis T et un ensemble ordonné O, alors φ est un isomorphisme d'ordre si et seulement si φ est un isomorphisme de treillis. De plus, une bijection d'un treillis T dans un ensemble ordonné qui respecte la relation de couverture est également un isomorphisme de treillis.

Dans un treillis, certains éléments jouent un rôle particulier :

Définition 1.15 (Inf- et sup-irréductibles) *Un élément j d'un treillis est un* sup-irréductible *si et seulement s'il ne peut pas être obtenu comme borne supérieure d'un ensemble d'éléments qui ne contient pas j. De même, un élément m est un* inf-irréductible *si et seulement s'il ne peut pas être obtenu comme borne inférieure d'un ensemble d'éléments qui ne contient pas m.*

Les inf- et les sup-irréductibles d'un treillis se reconnaissent très facilement sur le diagramme de Hasse. En effet :

- un inf-irréductible m a une unique couverture supérieure, notée m^+ ;
- un sup-irréductible j a une unique couverture inférieure, notée j^-.

Cette propriété se comprend facilement car, si un élément x d'un treillis a au moins deux couvertures inférieures z et t, alors x est la borne supérieure de z et t, et donc x n'est pas un sup-irréductible.

Ces éléments sont importants car leur connaissance permet de reconstituer tout le treillis [6]. Les éléments irréductibles sont les briques de base du treillis. En effet, tous les autres éléments peuvent être retrouvés par une combinaison de bornes supérieures et de bornes inférieures d'éléments irréductibles. Un élément irréductible, par contre, ne peut pas être calculé à partir des autres éléments du treillis.

Étant donné un treillis L, on notera J_L (ou simplement J) l'ensemble de ses sup-irréductibles et M_L (ou M) l'ensemble de ses inf-irréductibles.

Proposition 1.16 *Soit T un treillis. Tout élément x de T est la borne supérieure des sup-irréductibles qui sont plus petits que x, et la borne inférieure des inf-irréductibles qui sont plus grands que x.*

$$x = \bigvee\{j \in J, j \leq x\} = \bigwedge\{m \in M, x \leq m\}$$

On note J_x (resp. M_x) l'ensemble des sup-irréductibles (resp. inf-irréductibles) plus petits (resp. plus grands) que x : $J_x = \{j \in J : j \leq x\}$, $M_x = \{m \in M : x \leq m\}$). Ces ensembles sont un codage du treillis [10, 4]. En effet, la relation d'ordre est caractérisée par : pour tous éléments x, y d'un treillis,

$$x \leq y \iff J_x \subset J_y \iff M_y \subset M_x$$

De plus, la borne supérieure et la borne inférieure sont données par les formules suivantes [10, 4] :

$$M_{x\vee y} = M_x \cap M_y \iff M\backslash M_{x\vee y} = M\backslash M_x \cup M\backslash M_y$$

$$J_{x\wedge y} = J_x \cap J_y$$

Définition 1.17 (Sous-treillis) *Soit T un treillis. L'ordre induit sur un sous ensemble T_1 de T est un* sous-treillis *de T si T_1 est stable sous l'action des bornes supérieures et inférieures de T, c'est-à-dire si, pour tous $x, y \in T_1, x \vee_L y \in T_1$ et $x \wedge_T y \in T_1$.*

On remarquera que tout intervalle non vide $[a, b]$ d'un treillis T est un sous-treillis de T. En effet, si deux éléments x et y appartiennent à l'intervalle, ils sont tous les deux plus petits que a, et donc leur borne supérieure $x \vee y$ est également inférieure ou égale à a. Comme x et y sont tous les deux plus grands que b, leur borne supérieure l'est également. La borne supérieure de x et y appartient donc à l'intervalle. Le même raisonnement est valable pour la borne inférieure.

Nous introduisons maintenant quelques classes de treillis dont nous aurons besoin dans la suite.

Définition 1.18 (Treillis rangés) *Un treillis T est dit* rangé *si, pour tout couple d'éléments a, b avec $a \leq b$ dans T, tous les chemins de a à b dans le graphe (orienté) de la relation de couverture ont la même longueur.*

À chaque élément d'un treillis rangé T on peut associer un *rang* r entier, tel que :
- $r(0_L) = 0$;
- si $x \prec y$, alors $r(y) = r(x + 1)$.

On appelle la *hauteur* d'un treillis rangé la longueur d'un chemin dans la relation de couverture entre le plus petit et le plus grand élément (la hauteur du treillis est le rang de son plus grand élément).

Définition 1.19 (Hypercube,Treillis booléen) *Un treillis T est un* hypercube de dimension *n, ou un* treillis booléen*, s'il est isomorphe à l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments, ordonné par inclusion.*

La figure 1.3 montre des exemples d'hypercubes. Remarquons qu'un hypercube est nécessairement rangé, car on peut associer à chacun de ses éléments un rang qui est le cardinal du sous-ensemble lui correspondant.

Définition 1.20 (Treillis distributif) *Un treillis T est* distributif *s'il satisfait les deux relations de distributivité suivantes :*

$$\forall x, y, z \in L,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$\forall x, y, z \in L,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

La figure 1.4 montre un exemple de treillis distributif.

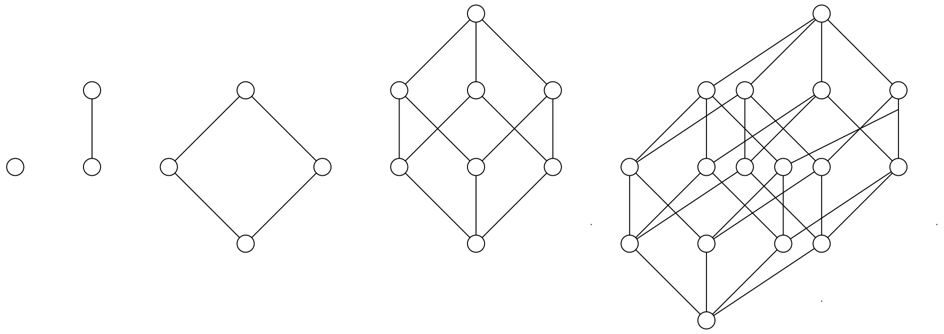


FIG. 1.3 – *Les hypercubes de dimension 0, 1, 2, 3 et 4.*

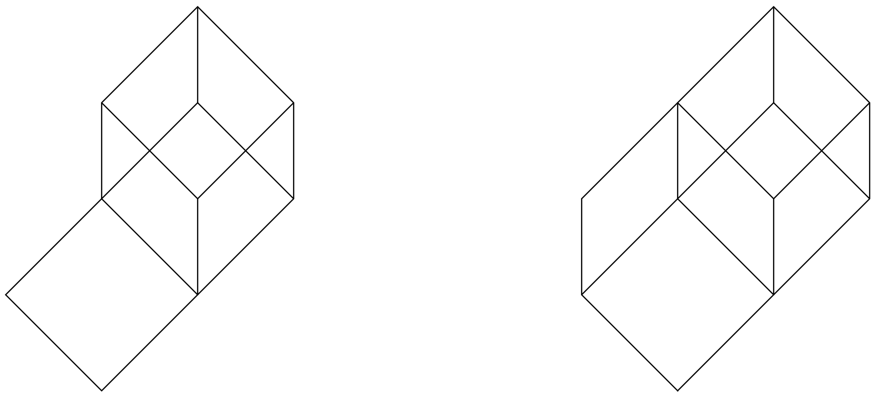


FIG. 1.4 – *Un treillis distributif (à gauche) et un treillis* SLD *(à droite)*

Définition 1.21 (Treillis SLD) *Un treillis T est* supérieurement localement distributif *(noté* SLD*) si l'intervalle compris entre tout élément x et la borne supérieure des couvertures supérieures de x est un hypercube.*

Les treillis *inférieurement localement distributifs* (*ILD*) sont définis de manière duale. Remarquons que si T est un treillis SLD, son dual est un treillis ILD, et réciproquement. La figure 1.4 montre un exemple de treillis SLD.

Les treillis distributifs sont des treillis SLD particuliers. Ils sont caractérisés par le fait qu'ils sont à la fois supérieurement et inférieurement localement distributifs, c'est-à-dire que les intervalles entre un élément et, d'une part, la borne supérieure de ses couvertures supérieures, et, d'autre part, la borne inférieure de ses couvertures inférieures, sont des hypercubes.

Les treillis distributifs et SLD jouent un grand rôle dans l'étude des modèles que nous allons présenter et dans la théorie des treillis en général.

Théorème 1.22 *[9] Un treillis est distributif si et seulement si il est isomorphe au treillis des idéaux de l'ordre induit sur ses sup-irréductibles.*

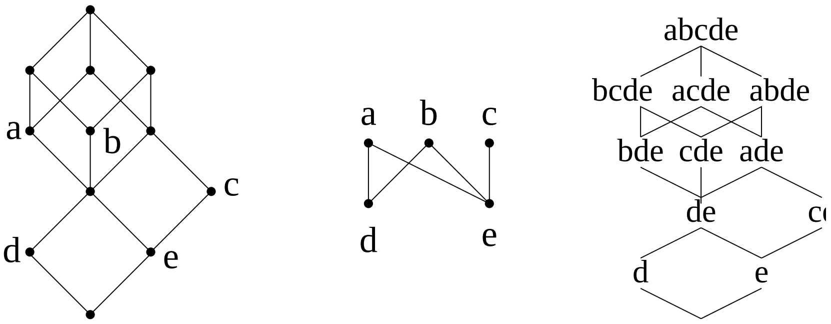


FIG. 1.5 – *De gauche à droite, un treillis distributif, l'ordre induit sur ses inf-irréductibles et le treillis des idéaux de cet ordre*

Voir la figure 1.5 pour une illustration de ce théorème.

Nous allons beaucoup parler des treillis SLD, nous donnons donc quelques propriétés et caractérisation de ces treillis :

Proposition 1.23 *Un treillis T est* SLD *si et seulement si, pour tous $x, y \in T$,*

$$y \succ x \iff |M_x \backslash M_y| = 1$$

On conclut de cette proposition que tous les treillis SLD sont rangés : pour tous éléments a, b d'un treillis SLD, tels que $a \leq b$, si tous les chemins de a vers b dans la relation de couverture n'ont pas la même longueur, alors il existe forcément deux éléments x et y compris entre a et b tels que $|M_x \backslash M_y| \neq 1$. On en déduit également que la hauteur d'un treillis SLD est $|M|$.

Nous introduisons maintenant les *relations flèches*, qui sont un outil de caractérisation et de manipulation des treillis.

Définition 1.24 *[65] Soit T un treillis, $j \in J$ et $m \in M$. Nous définissons :*
- *$j \downarrow m$ s $j \not\leq m$ et $j^- \leq m$;*
- *$j \uparrow m$ si $j \not\leq m$ et $j \leq m^+$;*
- *$j \updownarrow m$ si $j \downarrow m$ et $j \uparrow m$.*

Nous reviendrons plus en détail sur les relations flèches plus tard. Nous verrons qu'elles peuvent permettre de caractériser très simplement les espaces des configurations de certains modèles. Pour l'instant, nous donnons le résultat suivant :

Lemme 1.25 *[15] Soit T un treillis. Alors :*
1. *$\forall\ m \in M,\ \forall x \in T,\ (m \not\leq x \implies$ il existe $m \in M$ tel que $x \leq m$ et $j \uparrow m)$.*
2. *$\forall m \in M,\ \forall x \in T,\ (x \not\leq m \implies$ il existe $j \in J :\ j \leq x$ et $j \downarrow m)$.*

De plus, si T est SLD*, alors le point 2 devient :*

$$\forall\ m \in M,\ \forall x \in T,\ (x \not\leq m \implies \text{il existe } j \in J\ :\ j \leq x \text{ et } j \updownarrow m)$$

Les treillis SLD sont caractérisés par le fait que la relation $\updownarrow$ est une surjection de J dans M [15] : pour tout j dans J, il existe un unique m dans M tel que $j \updownarrow m$. En revanche, pour tout m dans M, il peut exister plusieurs j dans J tels que $j \updownarrow m$. Notons qu'il en existe toujours au moins un. L'ensemble J est donc naturellement partitionné en $|M|$ ensembles :

$$m^{\updownarrow} = \{j, j \updownarrow m\}.$$

Nous donnons enfin un résultat qui permet de montrer qu'un ensemble partiellement ordonné est un treillis, sans avoir à montrer l'existence de la borne inférieure.

Théorème 1.26 *Tout ordre ayant un unique plus petit élément tel que toute paire d'éléments a une borne supérieure est un treillis. De même, tout ensemble partiellement ordonné ayant un unique plus grand élément tel que toute paire d'éléments a une borne inférieure est un treillis.*

1.5 Modèles dynamiques discrets

Nous présentons brièvement dans cette section ce que nous entendons par les termes *modèles dynamiques discrets*.

À chaque étape d'un temps discret, un tel modèle est dans un certain état, que nous appellerons *configuration*. Ces configurations sont décrites par des objets combinatoires, comme par exemple des graphes et des partitions. On ne fait pas la distinction entre une configuration et sa description. Un modèle dynamique discret est alors défini par une configuration initiale et une règle d'évolution, qui stipule sous quelles conditions une configuration peut changer, et qui décrit les nouvelles configurations qu'on peut obtenir. Cette règle est généralement locale, et entraîne une modification locale de la configuration courante. Remarquons qu'en général cette règle d'évolution peut être appliquée à plusieurs endroits d'une configuration, ce qui engendre plusieurs nouvelles configurations.

Si une configuration c' peut être obtenue à partir d'une configuration c par une application de la règle d'évolution, on dira que c' est un *successeur immédiat* de c, et que c est un *prédécesseur immédiat* de c', ce que l'on note $c \longrightarrow c'$. Nous considèrons fréquemment l'ensemble de toutes les configurations atteignables à partir d'une configuration initiale d'un modèle donné, muni de la relation de prédécesseur. Nous appelons cet ensemble l'*espace des configurations* du modèle.

Si une configuration est telle que la règle d'évolution ne peut pas lui être appliquée, nous dirons que cette configuration est *stable*. Si une configuration stable est atteinte à partir de la configuration initiale d'un modèle par une séquence d'applications de la règle d'évolution, on dira que cette configuration est une configuration *finale* de ce modèle. Dans le cas général, un modèle peut avoir, à partir d'une même configuration initiale, plusieurs configurations finales (s'il en a).

Cependant, dans la plupart des cas que nous étudierons, les modèles ayant une configuration finale n'en auront qu'une. Pour la plupart des modèles que nous allons considérer, toutes les séquences d'application de la règle sont toujours finies : elles mènent toutes à une configuration stable. Si, quel que soit l'ordre choisi pour les différentes applications de la règle, un modèle atteint toujours la même configuration stable, on dit qu'il est *convergent*.

La notion de convergence peut être raffinée :

Définition 1.27 (Convergence forte, modèle fortement convergent [27]) *Un modèle dynamique discret est dit* fortement convergent *si, étant donnée une configuration initiale, ou bien toutes les séquences d'applications de la règle peuvent être prolongées infiniment, ou bien elles mènent toutes à la même configuration finale en un même nombre d'étapes.*

Pour un modèle convergent, on dira que toute séquence d'application de la règle qui, partant de la configuration initiale, aboutit à la configuration finale (qui est unique), est *maximale*.

Remarquons que, s'il n'y a pas de circuits dans l'espace des configurations d'un modèle, alors la clôture réflexive et symétrique de la relation de prédécesseur immédiat (que nous appellerons la relation de *prédécesseur*) définit un ordre sur les configurations atteignables : une configuration c est plus petite qu'une configuration c' si et seulement si c' peut être obtenue à partir de c par une suite d'applications de la règle d'évolution. Dans ce cas, nous représenterons l'espace des configurations par son diagramme de Hasse : la configuration initiale est en bas du diagramme, et ses successeurs immédiats sont au-dessus d'elle, et liés à elle par un segment de droite.

L'étude des ordres induits sur des objets combinatoires par des modèles dynamiques discrets est un champ de recherche actif, et de nombreux résultats ont été obtenus sur ce sujet [34, 30, 32, 42].

Note 1.28 La plupart des travaux précédents traitant de ce sujet considèrent en fait l'ordre induit par la relation de *successeur* sur les configurations, plutôt que celui induit par la relation de *prédécesseur*, comme nous le faisons ici. Cet ordre est le dual (définition 1.8) de celui que nous considérons ici. En effet, la convention pour l'étude des dynamiques discrètes est de placer la configuration initiale en haut du schéma, et la configuration finale en bas. Nous avons choisi de faire l'inverse car ceci est plus naturel pour l'utilisation de la théorie des ordres. Nous avons donc inversé l'ordre avec lequel certains résultats existants que nous allons présenter avaient été initialement énoncés. Ceci ne modifie aucunement ni la validité de ces résultats, ni les techniques utilisées pour les démontrer.

Le fait que tout treillis fini ait un unique élément maximal implique directement que, si les espaces des configurations d'un modèle dynamique discret sont tous des treillis, alors le modèle converge toujours (c'est-à-dire qu'il atteint toujours la même configuration finale). Mais la notion de convergence induite par les treillis est plus forte : le fait qu'un espace des configurations soit un treillis n'implique pas seulement que toute suite d'applications de la règle va mener à la même configuration finale, mais également qu'étant données deux configurations atteignables quelconques, il existe une unique première configuration atteignable à partir des deux (qui est leur borne supérieure). Cette notion de convergence donne en elle-même beaucoup d'informations sur le modèle étudié, et complète la notion de forte convergence que nous avons déjà présentée.

De plus, le fait que l'espace des configurations soit un treillis rend possible l'utilisation des nombreux codages et algorithmes connus sur les treillis et les classes particulières de treillis [6]. Par exemple, il existe un algorithme générique qui, étant donné un treillis distributif quelconque, donne un élément tiré au hasard de ce treillis avec une distribution uniforme [60]. Comme la plupart des modèles que nous étudions ici sont des modèles représentant des objets physiques, la possibilité d'obtenir une configuration avec une distribution uniforme est cruciale : ceci rend possible l'étude de l'entropie du système, et donne une idée de la forme générale de l'objet modélisé dans la nature.

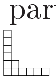
Nous donnons ici un exemple très simple de modèle dynamique discret. Ceci nous permet de bien illuster les notions dont nous avons parlé : le modèle de Young.

Définition 1.29 (Partition, part, diagramme de Ferrers [1], composition) *Une* partition *d'un entier n est une suite d'entiers décroissante (au sens large) dont la somme vaut n. On note généralement une partition p par un k-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ où $p_k > 0$. Par définition, on a donc $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$ et $p_i \geq p_{i+1}$ pour $1 \leq i < k$.*

Chaque entier p_i est appelé une part *de la partition p. L'entier p_1 est la* hauteur *de la partition et k est sa* longueur. *Une partition est dite* incluse dans une boîte $l \times h$ *si sa hauteur est au plus h et sa longueur est au plus l. On appelle* partition vide *la partition dont toutes les parts sont nulles,* i.e. *l'unique partition de 0, notée $()$.*

Étant donnée une partition p de n, il existe une représentation classique de p par un diagramme de Ferrers. *Le diagramme de Ferrers de p est obtenu en accolant k colonnes de carrés alignées à leur base, telles que la i-ème colonne contienne p_i carrés.*

Une composition *d'un entier n est une suite d'entiers dont la somme vaut n.*

Par exemple, si l'on considère les deux partitions $p = (4, 3, 3, 2)$ et $q = (6, 2, 1, 1, 1, 1)$ de $n = 12$, on obtient les diagrammes  et  respectivement. Nous appellerons les carrés d'une partition des *grains* (par analogie avec les modèles de pile de sable que nous introduisons dans le chapitre suivant), et nous disons, quand nous considèrerons des modèles dynamiques discrets sur des partitions, que les grains peuvent *tomber* d'une colonne vers une autre.

Définition 1.30 (Modèle de Young, $L(n, m)$ [5]) *Les configurations de ce modèle sont des diagrammes de Ferrers, c'est-à-dire des partitions d'entiers. La configuration initiale est la partition vide $()$. Étant donnés deux entiers n et m, la règle d'évolution est la suivante : $p \longrightarrow p'$ si p' est une partition telle qu'il existe un entier $1 \leq i \leq n$ vérifiant $p_i < m$, $p'_i = p_i + 1$ et $\forall j \neq i,\ p'_j = p_j$. L'espace des configurations obtenu est alors noté $L(n, m)$.*

En d'autres termes, on peut ajouter un carré sur le diagramme de Ferrers de p si on respecte la condition de décroissance (p' est une partition) et si on ne sort pas de la boîte $n \times m$. La figure 1.6 présente un exemple d'espace des configurations du modèle.

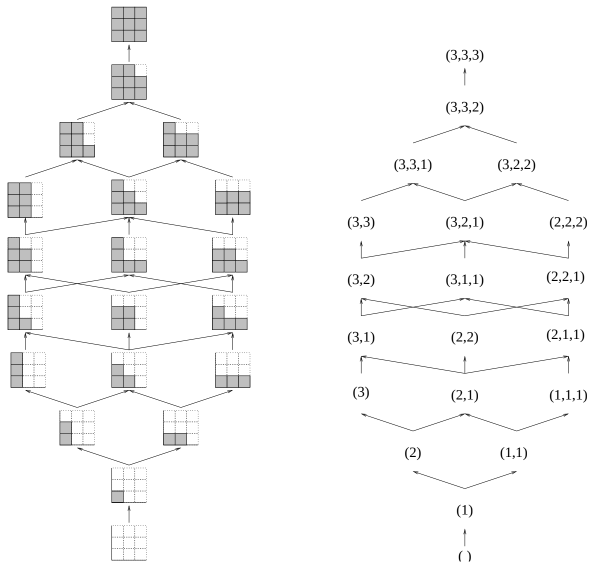


FIG. 1.6 – Le treillis distributif $L(3,3)$. De gauche à droite : la représentation par les diagrammes de Ferrer, et la représentation par des k-uplets.

Cet ensemble est toujours un treillis distributif : considérons pour commencer un espace des configurations $L(n,m)$ du modèle de Young. Il ne peut clairement pas y avoir de circuit dans $L(n,m)$ puisque la somme des parts de la partition croît strictement à chaque application de la règle. Les ensembles $L(n,m)$ sont donc des ordres, et on peut vérifier facilement que $a \geq b$ dans $L(n,m)$ si et seulement si $a_i \geq b_i$ pour tout i. De plus, $L(n,m)$ a un plus petit élément, qui est la partition vide (). Considérons maintenant deux éléments a et b de $L(n,m)$, et définissons c par $c_i = \max(a_i, b_i)$ pour tout i. Il est clair que c est une partition de $L(n,m)$. De plus, d'après la caractérisation de l'ordre, elle est clairement plus grande que a et b. Enfin, considérons un élément d de $L(n,m)$ supérieur à a et b. D'après la caractérisation de l'ordre, on a pour tout i : $d_i \geq a_i$ et $d_i \geq b_i$, donc $d_i \geq c_i = \max(a_i, b_i)$, ce qui montre que d est plus grand que c. Par conséquent, c est la borne supérieure de a et b. L'ordre $L(n,m)$ a un plus grand élément et tout couple d'éléments a un infimum, donc d'après le Théorème 1.26, c'est un treillis. En fait, les treillis $L(n,m)$ sont connus comme les treillis de Young [5].

Les treillis de Young sont de plus des treillis distributifs. On se convainc facilement que la borne inférieure c de deux configurations a et b est donnée par : pour tout i, $c_i = \min(a_i, b_i)$. Pour montrer que le treillis est distributif, il faut vérifier que, pour toutes partitions p, q et r, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, ce qui est immédiat.

Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes notions dont nous aurons besoin pour l'étude des modèles que nous allons présenter. On peut voir que cette étude nécessite des outils provenant d'un grand nombre de disciplines, et notamment de la combinatoire.

Nous allons exposer dans les deux chapitres suivants les modèles que nous allons étudier.

Chapitre 2

Modèles de piles de sable et Chip Firing Game

Dans ce chapitre nous présentons un aperçu des travaux réalisés auparaventsur les liens entre les modèles dynamiques discrets et les treillis. Nous présentons également les différents modèles que nous étudions par la suite.

Dans la section 2.1, nous présentons tous les modèles étudiés, ainsi que les principaux résultats connus à leur sujet. Dans la section 2.2, nous verrons qu'un de ces modèles, le Chip Firing Game (CFG), joue un rôle central dans cette étude, car il permet de simuler une grande partie des autres modèles. Dans la section 2.3, nous allons voir que les espaces des configurations des Chip Firing Games sont toujours des treillis, ce qui implique que les espaces des configurations de tous les modèles qui peuvent être simulés par CFG sont également des treillis.

Pour plus de détails sur ces questions, voir notamment [55, 40].

2.1 Les modèles

En 1973, Brylawski [14] a étudié l'ensemble des partitions d'un entier n, muni de l'ordre suivant, appelé *l'ordre de dominance*

$$p \geq q \text{ si et seulement si } \sum_{j=1}^{i} p_j \leq \sum_{j=1}^{i} q_j \text{ pour tout } i.$$

C'est-à-dire qu'une partition p est plus grande qu'une partition q si et seulement si la i^{e} somme préfixe de p est plus petite que la i^{e} somme préfixe de q, pour tout i. Il a démontré que cet ordre est un treillis, appelé $L_B(n)$. De plus, il a démontré que ce treillis peut être vu comme l'espace des configurations d'un modèle dynamique discret défini de la façon suivante :

Définition 2.1 (Modèle de Brylawski, règle V, règle H, $L_B(n)$ [14]) *Les configurations de ce modèle sont des diagrammes de Ferrers (c'est-à-dire des partitions), dont les* *carrés sont appelés des* grains. *La configuration initiale est la partition* (n). *Le modèle évolue selon les deux règles suivantes :*

1. *Règle verticale : un grain peut passer d'une colonne à sa voisine de droite si la condition de décroissance est respectée, c'est-à-dire que, étant donnée une partition* p, *un grain peut tomber de la colonne* i *à la colonne* $i+1$ *si* $p_i - p_{i+1} \geq 2$.
2. *Règle horizontale : un grain peut passer de la colonne* i *à la colonne* $j > i$ *si toutes les colonnes entre la* i*-ème et la* j*-ème ont la même hauteur* k, *la colonne* i *étant de hauteur* $k+1$ *et la colonne* j *de hauteur* $k-1$.

L'espace des configurations obtenues à partir de (n) *est alors noté* $L_B(n)$.

Les règles d'évolution de ce modèle sont présentées dans la figure 2.1, et l'espace des configurations $L_B(7)$ est présenté dans la figure 2.2. Brylawski a prouvé que toute partition de n peut être obtenue à partir de (n) par l'itération de ces règles, et que l'ordre induit par la règle d'évolution est exactement l'ordre de dominance. De plus, il a donné une formule explicite pour la borne supérieure de deux configurations :

$$\sup(p,q) = r \text{ si et seulement si pour tout } j : \sum_{i=1}^{j} r_i = min(\sum_{i=1}^{j} p_i, \sum_{i=1}^{j} q_i).$$

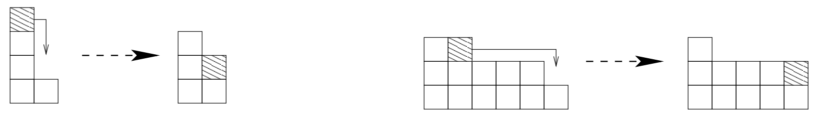


FIG. 2.1 – *Les règles du modèle de Brylawski. À gauche, la règle verticale. À droite, la règle horizontale.*

Une restriction importante du modèle de Brylawski a été introduite dans [29] :

Définition 2.2 (Sand Pile Model, SPM [29])
SPM est obtenu à partir du modèle de Brylawski en interdisant les applications de la règle horizontale. L'espace des configurations du modèle avec comme configuration initiale une pile de n *grains est noté* $SPM(n)$.

$SPM(n)$ est toujours un sous-ensemble de $L_B(n)$, la relation de successeur de $SPM(n)$ étant elle-même incluse dans celle de $L_B(n)$.

Un exemple d'espace des configurations du Sand Pile Model est donné dans la figure 2.2. SPM est apparu comme un représentant typique du phénomène d'auto-organisation critique (*Self-Organized Criticality,* SOC) [36, 62]. Il a été utilisé pour étudier les avalanches (la taille des avalanches réelles obéit à la même loi que les avalanches de SPM [62]) et la forme des dunes [2]. Il est aussi relié à des problèmes de programmation distribuée, comme il est montré dans [22].

Ici, nous nous contenterons de considérer SPM comme un modèle abstrait, ses configurations étant des partitions d'entier. Dans [29], Goles et Kiwi ont prouvé que $SPM(n)$ est

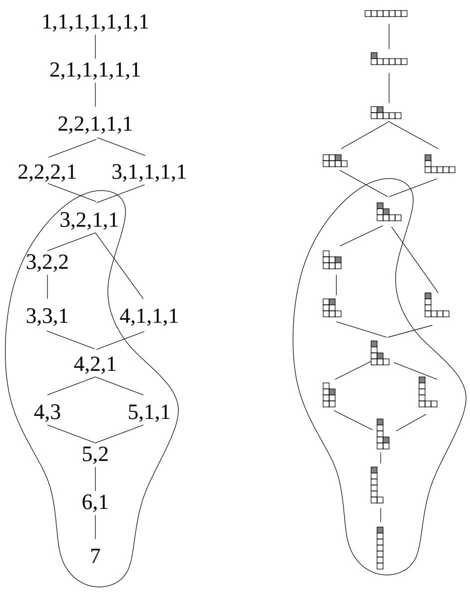


FIG. 2.2 – *Le treillis de toutes les partitions de 7, c'est-à-dire $L_B(7)$. Si l'on se restreint à la règle verticale, on obtient la partie entourée, qui est $SPM(7)$.*

toujours un sous-ordre de $L_B(n)$. Ils ont également prouvé que $SPM(n)$ est un treillis, et que la formule de la borne supérieure est la même que pour $L_B(n)$. De plus, une caractérisation des éléments de $SPM(n)$ est donnée dans [31]. On peut remarquer que $SPM(n)$ et $L_B(n)$ partagent de nombreuses propriétés. Cependant, ils ont aussi beaucoup de différences : par exemple dans [31] il est prouvé que toutes les séquences d'application de la règle entre la configuration initiale et la configuration finale ont toutes la même longueur dans $SPM(n)$, ce qui n'est clairement pas le cas pour $L_B(n)$ (voir la figure 2.2). D'autres travaux ont donné plus d'informations sur la structure de ces treillis. En particulier, il est montré dans [41] et [39] que $SPM(n)$ et $L_B(n)$ ont une structure auto-similaire et qu'un arbre peut être associé à ces ensembles. Des formules récursives sont données pour le nombre d'éléments de ces treillis, ainsi que des extensions infinies de ces modèles (donnant lieu à des treillis infinis).

Le fait surprenant que tous les espaces des configurations des modèles de Young, de Brylawski et de SPM sont tous des treillis a alors été constaté, et la question de savoir combien ces modèles peuvent être modifiés sans perdre cette propriété s'est posée. Plusieurs variations de ces modèles ont ensuite été introduits pour tenter de répondre à cette question. La première d'entre eux est le Ice Pile Model (IPM) :

Définition 2.3 (Ice Pile Model, IPM) *[31]. IPM est obtenu à partir du modèle de Brylawski en bornant la règle horizontale : un grain peut passer de la colonne i à la colonne $j > i$ si :*

- *toutes les colonnes entre la i^e et la j^e ont la même hauteur h, la colonne i étant de hauteur $h+1$ et la colonne j de hauteur $h-1$, et*
- *$j-i$ est inférieur à un certain entier k, où k est un entier donné, qui est un paramètre*

du modl̀e.
L'espace des configurations du modèle ayant comme configuration initiale une pile de n grains est noté $IPM(n,k)$.

Un exemple de l'espace des configurations de IPM est donné dans la figure 2.3. Dans [31], il est prouvé que $IPM(n,k)$ est toujours un sous-ordre de $L_B(n)$. Ce modèle induit également un treillis [31]. Il peut être vu comme une généralisation à la fois du modèle de Brylawski et de SPM : $L_B(n)$ n'est rien d'autre que $IPM(n,n)$ et $SPM(n)$ n'est rien d'autre que $IPM(n,0)$.

Une autre généralisation de SPM a alors été introduite :

Définition 2.4 (Modèle $L(n,\theta)$) *[31] La configuration initiale de ce modèle est la partition (n), pour un n donné, et un grain peut passer d'une colonne i à sa voisine de droite $i+1$ si la différence de hauteur entre les deux colonnes est au moins θ, où θ est un entier donné, qui peut être négatif.*

Donc, $SPM(n)$ n'est rien d'autre que $L(n,2)$. Le fait que θ puisse être négatif implique que les grains peuvent remonter (dans ce cas, nous n'obtenons plus des partitions de n, mais des *compositions* de n, leur longueur étant restreinte à n pour éviter des mouvements infinis vers la droite). Ce modèle a été introduit pour prendre en compte le fait que des particules peuvent accumuler de l'énergie et que, dans certains cas, elles peuvent donc remonter au lieu de descendre. Un exemple d'espace des configurations de $L(n,\theta)$ est donné dans la figure 2.3. À nouveau, les ensembles $L(n,\theta)$ sont des treillis pour tout n et tout θ [31].

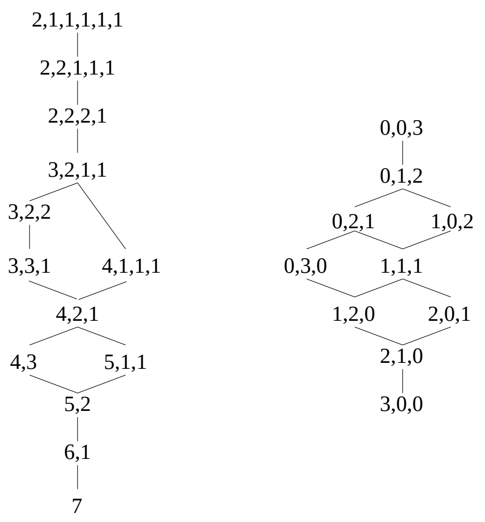


FIG. 2.3 – *Les espaces des configurations $IPM(7,2)$ (à gauche) et $L(3,-1)$ (à droite). Remarquons que l'ordre $IPM(7,2)$ est un sous-ordre de $L_B(7)$ présenté dans la figure 2.2, ce qui est toujours le cas pour tous n et k.*

Ces deux modèles sont des extensions naturelles du modèle de Brylawski et de SPM. Ils sont plus généraux, mais gardent la propriété d'engendrer des treillis. Les investigations ont donc continué avec des modifications plus fortes des modèles. La première idée a été d'autoriser plusieurs grains à tomber à chaque étape, ce qui a donné le modèle $CFG(n,m)$:

Définition 2.5 (Modèle $CFG(n,m)$) *La configuration initiale de ce modèle est la partition (n), et si la colonne i a au moins $m+1$ grains de plus que la colonne $i+1$, alors on peut enlever m grains de la colonne i et ajouter un grain à chacune des colonnes de $i+1$ à $i+m$. L'espace des configurations du modèle ayant comme configuration initiale une pile de n grains est noté $CFG(n,m)$.*

Voir la figure 2.4 pour un exemple. Il est clair que $SPM(n)$ n'est rien d'autre que $CFG(n,1)$. Les espaces des configurations obtenus sont à nouveau des treillis [32]. Un exemple d'espace des configurations est donné dans la figure 2.5.

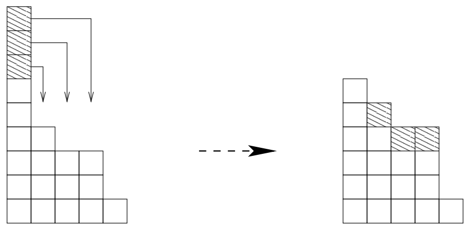


FIG. 2.4 – *La règle d'évolution utilisée pour obtenir $CFG(n,m)$, pour $m=3$.*

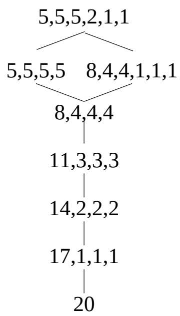


FIG. 2.5 – *L'espace des configurations $CFG(n,m)$ pour $n=20$ et $m=3$.*

Il est apparu au cours de ces études que le fait que les modèles dynamiques discrets considérés induisent des treillis est une propriété très stable. Remarquons toutefois que d'autres idées naturelles pour étendre SPM et le modèle de Brylawski ne préservent pas la structure de treillis, comme, en particulier, les généralisations à deux dimensions (les grains bougent sur une grille planaire), qui semblent intéressantes pour l'étude des partitions planes. La question s'est alors posée de savoir s'il était possible de définir un modèle général ayant cette propriété, ce qui expliquerait quand et pourquoi elle apparaît. On constate en effet que les modèles de partitions ne sont pas les seuls modèles définis dans la littérature induisant une structure de treillis. Nous allons maintenant présenter certains de ces modèles. La plupart sont définis sur des graphes.

Le modèle du tas de sable abélien (TSA), dont nous parlerons plus en détail dans le chapitre 3, a été introduit initialement en physique dans [3] comme l'un des modèles les plus simples d'auto-organisation critique (SOC). Il a été également très étudié pour ses propriétés algébriques [24, 25].

Dans sa première version, le modèle a été défini sur une grille.

Définition 2.6 (Tas de sable abélien, TSA) *Le tas de sable abélien (TSA) est défini sur une grille rectangulaire. Un nombre de* grains *est disposé dans chaque case, et la règle d'évolution est la suivante : si une case contient quatre grains ou plus, alors cette case est* instable*, et elle s'*éboule *en perdant quatre grains, et en donnant un grain à chacune des cases voisines. Si la case est sur le bord ou sur un coin de la grille, un ou deux grains tombent vers l'extérieur.*

Le modèle a ensuite été étendu aux multi-graphes non orientés [17, 8]. Le modèle est dans ce cas défini sur un graphe non orienté $G = (V, E)$ avec un sommet distingué $\perp$, appelé *puits*. Une configuration du modèle est une répartition de grains sur les sommets du graphe, et la règle d'évolution devient : si un sommet $x \neq \perp$ contient au moins autant de grains qu'il a de voisins, il donne un grain à chacun d'eux (et donc en perd autant qu'il a de voisins).

La figure 2.6 montre un exemple d'espace des configurations du TSA. Les espaces des configurations des TSA sont tous des treillis [12].

L'Edge Firing Game (EFG), également appelé jeu de retournement des sources, a été défini dans des contextes variés [47, 56, 57, 51].

Définition 2.7 (Edge Firing Game, EFG) *Soit $G_0 = (V_0, E_0)$ un multi-graphe orienté avec un sommet distingué $\perp$. La configuration initiale du modèle est le couple $(G_0, \perp)$, et la règle d'évolution est la suivante : si le graphe admet une source x différente de $\perp$, on peut retourner tous les arcs incidents à x. En d'autres termes, $(G, \perp) \longrightarrow (G', \perp)$ si et seulement si il existe une source $v \neq \perp$ dans V telle que $V' = V$ et $E' = E \setminus \{(x, x') \mid (x', x) \in E\} \cup \{(x', x) \mid (x, x') \in E\}$. Par analogie avec les modèles de tas de sable, on appelera cette transformation l'*éboulement *de x.*

Voir la figure 2.7 pour un exemple.

Il est montré dans [59] que l'espace des configurations de tout EFG est à nouveau un treillis. Ce résultat est en fait plus fort que la simple structure de treillis, car l'auteur a démontré le résultat suivant :

Théorème 2.8 *[59] L'espace des configurations d'un Edge Firing Game est toujours un treillis distributif.*

Un modèle très similaire, le Chip Firing Game (CFG) a été introduit par Björner, Lovász et Shor dans [12, 11].

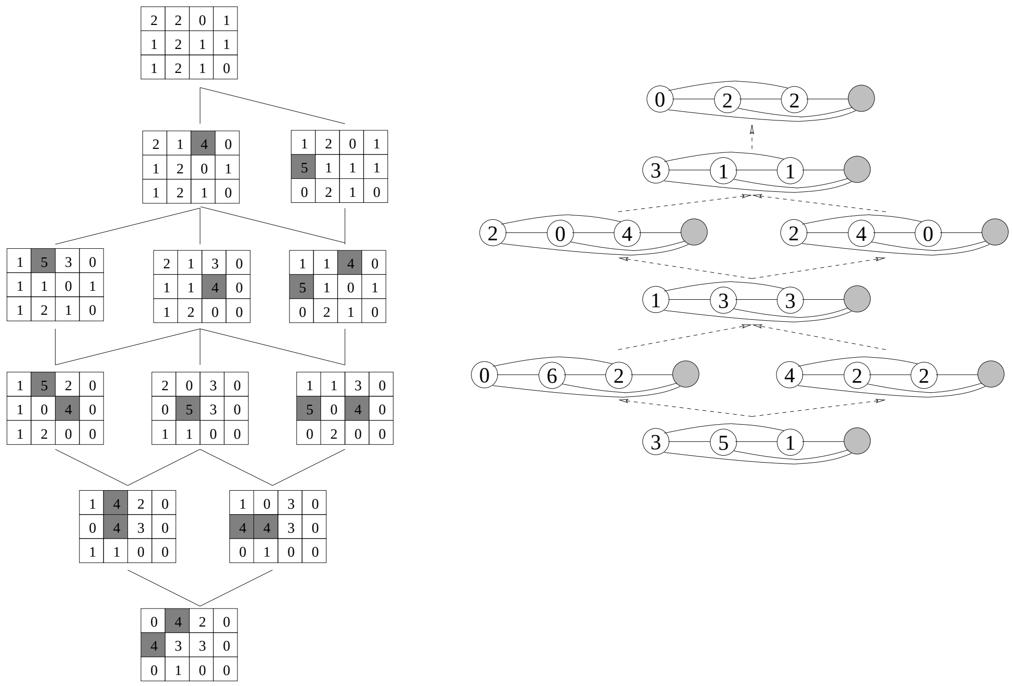


FIG. 2.6 – *À gauche, un exemple d'espace des configurations du tas de sable abélien original sur une grille* 4×3. *À droite, un exemple d'espace des configurations de la généralisation du tas de sable abélien sur un graphe non orienté (le puits est représenté en gris).*

Définition 2.9 (Chip Firing Game, CFG, éboulement) *Un Chip Firing Game (CFG) est défini par la donnée d'un (multi-)graphe* $G = (V, E)$ *orienté (appelé* support *du CFG) et d'une répartition d'un certain nombre de grains* (chips) *sur chaque sommet. Cette répartition est la* configuration initiale *du CFG. La règle d'évolution est alors : si un sommet* x *contient au moins autant de grains qu'il a d'arcs sortants, on transfère un grain le long de chacun de ces arcs. En d'autres termes, le sommet* x *perd* $d^-(x)$ *grains et chaque sommet* y *en gagne autant qu'il y a d'arcs* (x, y') *dans* E. *On appellera ce procédé* ébouler x.

Étant donné un sommet x et une configuration σ d'un CFG C, nous dirons que x est *instable* dans σ si x peut être éboulé, autrement dit si x contient au moins autant de grains que son degré sortant.

Voir figure 2.8 pour un exemple d'espace des configurations d'un CFG. Dans [12, 11, 42], des conditions de convergence (concernant le nombre de grains ou la structure du graphe) sont données. Nous reviendrons plus en détail sur la structure des espaces des configurations des CFG dans la section 2.3, puis dans le chapitre 4.

Enfin le Chip Firing Game sur un graphe en mutation (CFGM) a été introduit dans [28] comme une généralisation du Chip Firing Game.

Définition 2.10 (Chip Firing Game sur un graphe en mutation, CFGM) *Un CFGM est défini sur un multi-graphe orienté, dont les arcs changent de façon prédéterminée au*

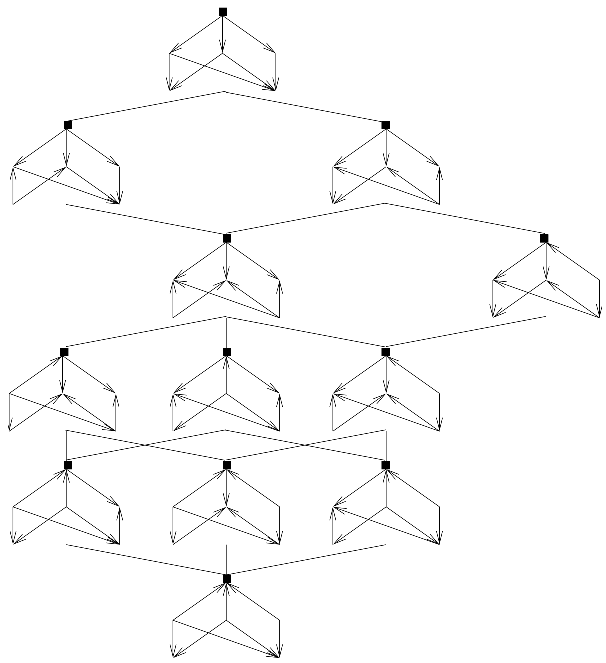


FIG. 2.7 – *Un exemple d'Edge Firing Game. Le sommet distingué est représenté par un carré noir.*

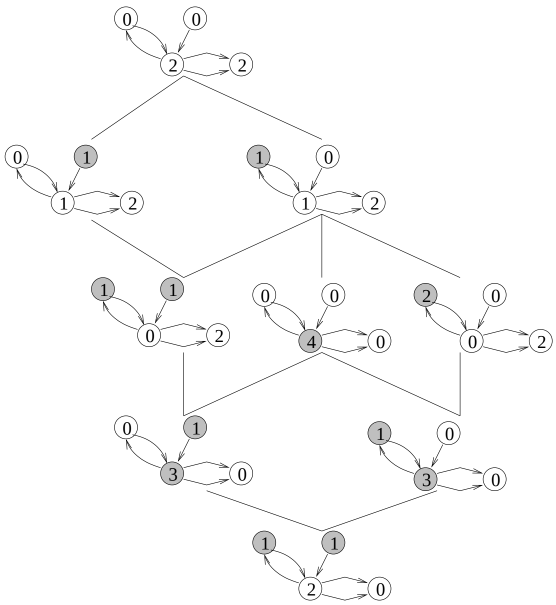


FIG. 2.8 – *L'espace des configurations d'un CFG.*

cours du temps. Une configuration d'un CFGM consiste en :

- *un multi-graphe orienté sur V ;*
- *sur chaque sommet $x \in V$ un nombre positif de grains ;*

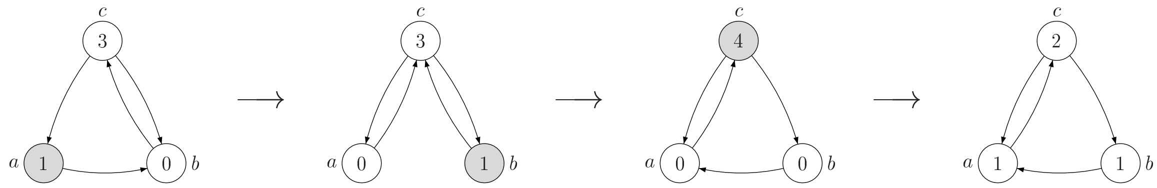


FIG. 2.9 – *Un exemple de avalanche dans un CFGM, dans lequel le début des séquences de mutation des sommets est :* $M_a = (\{c\}, \ldots), M_b = (\{a\}, \ldots), M_c = (\{a, b\}, \ldots)$

– *pour chaque sommet* $x \in V$ *une séquence infinie* M_x *de multi-ensembles de sommets de* V*, qui est la séquence de mutation de* x.

La règle d'évolution est la suivante : un sommet x *est instable s'il contient au moins autant de grains que son degré sortant courant.* Ébouler *un sommet instable consiste alors à transférer un grain le long de chaque arc sortant. Une mutation du graphe intervient après l'éboulement du sommet : les arcs sortants de* x *sont supprimés et, si* $M_x = (S_x^1, S_x^2, \ldots)$ *est la séquence de mutation de* x*, alors un nouvel arc* (x, y) *est ajouté pour chaque* $y \in S_x^1$*. Puis* S_x^1 *est retiré de la séquence* M_x*, et* M_x *devient alors* $(S_x^2, S_x^3, \ldots)$.

Nous définissons le support *initial* de tout CFGM comme étant son support dans la configuration initiale. Un exemple de avalanche d'un CFGM est donné dans la figure 2.9.

2.2 Le Chip Firing Game comme modèle général

Dans cette section, nous allons montrer que certains des modèles que nous avons présentés peuvent être vus comme des CFG particuliers. Les résultats de cette section proviennent de [42].

Nous allons distinguer dans la suite deux notions lorsque nous dirons qu'un modèle est un cas particulier d'un autre. La première, la notion de *simulation*, décrit le fait que dans certains cas, on peut établir qu'une instance particulière d'un modèle va avoir le même comportement qu'un autre modèle. C'est ce qui nous a permis par exemple d'énoncer que SPM est un cas particulier d'IPM dans la section précédente. La deuxième notion, celle d'*équivalence*, décrit le fait que deux instances d'un même modèle, ou de deux modèles différents, engendrent les mêmes espaces des configurations. Nous introduisons donc la définition suivante :

Définition 2.11 *Deux instances de deux modèles particuliers sont dites* équivalentes *si leurs espaces des configurations sont isomorphes.*

Si on considère un TSA défini sur $G = (V, E)$, il est clair qu'on obtient un CFG équivalent en prenant comme support le graphe $G' = (V, E')$ défini par :

– s'il y a une arête entre i et j dans G, si i et j sont différents du puits, alors G' contient les arcs (i, j) et (j, i).
– s'il y a une arête entre i et le puits dans G ; alors G' contient l'arc $(i, \perp)$.

La configuration initiale du CFG est la même que pour le TSA. L'ASM peut donc être vu comme un CFG non orienté avec un puits, c'est-à-dire un sommet qu'on s'interdit d'ébouler.

Théorème 2.12 *Tout Edge Firing Game peut être simulé par un tas de sable abélien, donc par un Chip Firing Game.*

Preuve : Considérons un EFG défini sur un graphe $G = (V, E)$ avec comme sommet distingué $\perp$. Considérons le graphe non-orienté $G' = (V, E')$ tel qu'il y a une arête entre deux sommets de G' s'il y a un arc entre ces deux sommets dans G. Soit l'ASM défini sur G' avec puits $\perp$, ayant pour configuration initiale celle où le sommet x dans G' contient autant de grains qu'il a d'arcs sortants dans G. Il est clair que l'espace des configurations de cet ASM est isomorphe à celui de l'EFG de départ. $\square$

Une deuxième classe de modèles qui peuvent être simulés par des CFG sont certains des modèles liés aux partitions d'entiers et aux systèmes granulaires présentés plus haut. C'est le cas de $SPM(n)$ (définition 2.2), de $L(n, \theta)$ (définition 2.4), des treillis de Young (définition 1.30) et de $CFG(n, m)$ (définition 2.5).

Les deux premiers modèles, $SPM(n)$ et $L(n, \theta)$, peuvent être simulés comme suit : considérons le graphe $G = (V, E)$ où $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $E = \{(i, i+1) | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i, i-1) | n \geq i \geq 1\}$. Le sommet $i, i \neq 0$ de ce graphe représente la colonne i du modèle. Maintenant, soit a une configuration du modèle $SPM(n)$. Nous plaçons $a_i - a_{i+1}$ grains dans le sommet i du CFG défini sur G pour $1 \leq i \leq n-1$, et on peut vérifier que le comportement du CFG obtenu est équivalent à celui de $SPM(n)$. En effet, si un grain tombe d'une colonne i vers la colonne $i+1$ dans SPM, cela augmente de 1 la différence de hauteur avec sa voisine de gauche, cela diminue de deux la différence de hauteur avec sa voisine de droite, et cela augmente de un la différence de hauteur entre les colonnes $i+1$ et $i+2$. Voir figure 2.10 pour un exemple de transition.

Ce codage a été développé pour la première fois dans [29]. Remarquons qu'il est facile de reconstruire a à partir de la configuration du CFG. De même, $L(n, \theta)$ peut être simulé par un CFG défini sur le même graphe, dans lequel on associe au sommet i $a_i - a_{i+1} - \theta + 2$ grains si a est la configuration de $L(n, \theta)$. Voir figure 2.11.

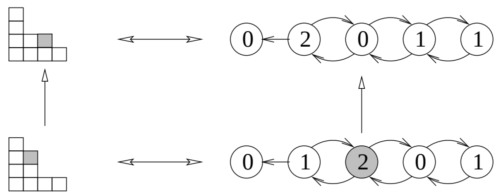


FIG. 2.10 – *Codage de $SPM(n)$ par un Chip Firing Game.*

Le modèle de Young peut être simulé par un CFG ou par un EFG. Le support du CFG qui produit le treillis de Young $L(n, m)$ est le suivant : $G = (V, E)$ avec $V = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$

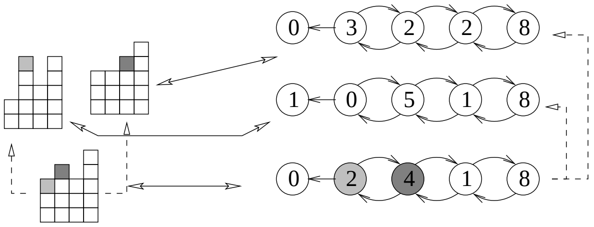


FIG. 2.11 – *Codage de $L(n, \theta)$ par un Chip Firing Game quand $\theta = -1$.*

et $E = \{(i, i+1) \mid 0 \leq i \leq m\}$. À une partition p de $L(n, m)$, on associe la configuration du CFG où le sommet i contient $a_{i-1} - a_i$ grains (on considère que $a_0 = m$, voir figure 2.12).

L'EFG qui simule le modèle de Young a pour sommets $\{1, \ldots, n+m\}$, et pour tout $i < n+m$, il y a un arc entre le sommet i et le sommet $i+1$. Le sens des arcs représente les pas (horizontaux ou verticaux) du chemin allant de $(0, m)$ à $(n, 0)$ en suivant le bord droit du diagramme de Ferrers de la partition. Le i^{e} arc est orienté vers la droite si le i^{e} pas de ce chemin est horizontal, et il est orienté vers la gauche sinon.

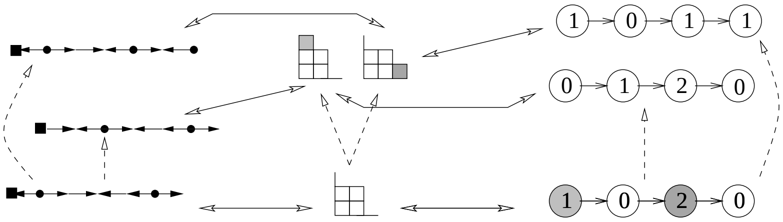


FIG. 2.12 – *Codage des treillis de Young par des Chip Firing Games.*

Le support du CFG qui simule $CFG(n, m)$ est différent : $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ et chaque sommet i a m arcs sortants $(i, i-1)$ et un autre arc sortant $(i, i+m)$ (c'est un multigraphe). Voir figure 2.13. Une configuration a de $CFG(n, m)$ est alors équivalente à une configuration du CFG où chaque sommet i contient $a_i - a_{i+1}$ grains.

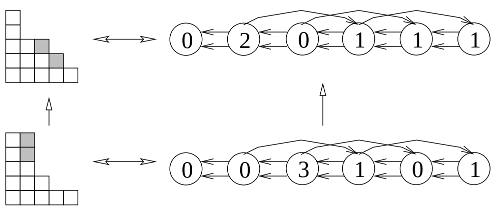


FIG. 2.13 – *Codage de $CFG(n, m)$ par un Chip Firing Game quand $m = 2$.*

2.3 Structure des espaces des configurations des Chip Firing Games

Nous présentons dans cette section les résultats connus sur la structure des espaces des configurations des CFG. L'espace des configurations de tout CFG est un treillis, ce qui implique que les espaces des configurations de tous les modèles qu'on peut simuler par CFG sont des treillis.

Sauf mention contraire, les résultats de cette section proviennent de [42].

Si on considère un CFG de support G ayant k sommets, on peut obtenir une description du CFG avec la matrice $k \times k$ $M = (a_{ij})$ où a_{ii} est le nombre d'arcs sortants du sommet i, et où $-a_{ij}$ est le nombre d'arcs du sommet j au sommet i. Cette matrice est appelée la *matrice laplacienne* de G [12]. Par exemple, pour le CFG donné figure 2.8, $k = 4$ et si on ordonne les sommets de gauche à droite et du haut vers le bas, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le produit de M par un vecteur $x = {}^t(x_1, \ldots, x_k)$ donne le vecteur $x' = {}^t(x'_1, \ldots, x'_k)$ tel que x'_i est (l'opposé de) la variation du nombre de grains au sommet i si on éboule x_j fois le sommet j, pour tout $1 \leq j \leq k$. Sur notre exemple, si on considère $x = {}^t(2, 1, 1, 0)$, on a $M \times x = {}^t(1, 1, 0, -2)$. Ce vecteur code la variation du nombre de grains dans chaque sommet si on éboule deux fois le premier sommet, une fois le deuxième et une fois le troisième : le nombre de grains dans les deux premiers sommets a diminué de 1, le nombre de grains dans le troisième sommet est resté le même, et celui du dernier sommet a augmenté de 2.

On a alors le résultat suivant sur les CFG sans composantes fermées :

Théorème 2.13 *L'espace des configurations d'un CFG sans composantes fermées est ordonné par la clôture réflexive et transitive de la relation de prédécesseur. Ceci implique que ce CFG est convergent.*

De plus, on sait [27] que les CFG sont des jeux fortement convergents (Définition 1.27). En d'autres termes, ou bien un CFG ne s'arrête jamais, ou bien toutes les séquences d'applications de la règle d'une configuration a menant à une autre configuration b ont la même longueur. Étant donnée une telle séquence p, nous notons $|p|_i$ le nombre d'éboulements du sommet i durant la séquence. Commençons par donner le résultat suivant :

Lemme 2.14 *Étant donné un CFG sans composantes fermées, si deux séquences s et t d'applications de la règle partent de la même configuration a et amènent à la même configuration b, alors :*

$$|s|_i = |t|_i \text{ pour tout sommet } i.$$

On peut alors définir le shot-vector $s(\sigma)$ comme le vecteur qui représente le nombre d'éboulements de chaque sommet lors d'une avalanche allant de la configuration initiale à σ. Remarquons que cette notion est valable non seulement pour les CFG, mais également pour tous les modèles qui peuvent être simulés par des CFG, et en particulier les EFG et les TSA.

Théorème 2.15 *Si a et b sont deux configurations obtenues à partir de la même configuration O d'un CFG, alors :*

$$a \geq b \Longleftrightarrow s(a) \geq s(b).$$

Théorème 2.16 *L'ensemble de toutes les configurations obtenues à partir de la configuration initiale O d'un CFG sans composantes fermées, ordonné par la clôture réflexive et transitive de la relation prédécesseur, est un treillis. De plus, la borne supérieure de deux éléments a et b est définie comme suit : soit s un vecteur tel que pour tout sommet i, $s_i = max(s_i(a), s_i(b))$; alors la configuration c telle que $s(c) = s$ est la borne supérieure de a et b.*

Remarquons qu'un treillis qui est l'espace des configurations d'un CFG est nécessairement rangé : on peut associer à chaque configuration c un rang qui est la somme de toutes les composantes du vecteur $k(O, c)$.

Remarquons aussi maintenant que les supports de tous les CFG définis dans la section précédente n'ont pas de composantes fermées. Par conséquent, on obtient les résultats suivants, démontrés auparavant dans [29], [32] et [33], comme des corollaires du théorème 2.16 :

Corollaire 2.17 ([29, 32, 33, 42]) *Les ensembles $SPM(n)$, $L(n, m)$, $R_b(n)$, $L(n, \theta)$ et $CFG(n, m)$, ordonnés par la clôture réflexive et transitive de la relation prédécesseur, sont des treillis.*

Le CFGM est également un jeu fortement convergent. De plus, pour les CFGM, des résultats sur les shot-vectors comparables à ceux existant pour les CFG ont été établis [28] :

Théorème 2.18 *Étant donné un CFGM et sa configuration initiale, soit toutes les avalanches sont infinies, soit toutes les avalanches se terminent en un même nombre d'étapes sur la même configuration, et le nombre de fois qu'un sommet donné est éboulé ne dépend pas de la avalanche choisie.*

Les CFGM engendrent également des treillis [28].

Dans la suite, si C est un CFG, un EFG ou un CFGM convergent, nous noterons $L(C)$ son espace des configurations.

Remarquons que nous n'avons pas présenté de codage de L_B et de IPM par des CFG. La raison en est que ces modèles ne peuvent pas être simulés par CFG. En effet, nous venons de voir que tous les treillis engendrés par des CFG sont rangés, ce qui n'est clairement pas le cas des treillis engendrés par L_B et IPM (voir les figures 2.2 et 2.3).

Une autre raison qu'on peut invoquer pour expliquer pourquoi L_B ne peut pas être simulé par un CFG est de constater que la règle d'évolution de L_B n'est pas *locale* : en effet, la règle horizontale peut s'appliquer sur un plateau d'une longueur quelconque. Or, la règle d'évolution d'un CFG est par définition locale. Ce raisonnement ne s'applique en revanche pas à IPM, car le fait de borner la règle horizontale en fait une règle locale. On voit donc que la localité de la règle n'est pas suffisante pour qu'un modèle soit simulable par un CFG.

Dans le chapitre 4, nous examinons plus en détail la structure des espaces des configurations des Chip Firing Games, ainsi que des variations de ce modèle.

Chapitre 3

Modèle du tas de sable abélien

Le modèle du tas de sable a été introduit par Bak, Tang et Wiesenfeld dans [3]. Ce modèle a été très étudié, en particulier en physique, en tant que modèle typique du phénomène d'auto-organisation critique (SOC). Ce modèle a en effet la propriété d'avoir un ensemble d'états critiques, pour lesquels la taille des avalanches qui se produisent lorsqu'on ajoute un grain au modèle suit une loi de puissance [37].

Dans sa première version [3], le modèle a été défini sur une grille, carrée ou rectangulaire. Il a ensuite été étendu au cas des graphes non orientés [17, 8].

Nous avons déjà donné la définition et évoqué certains aspects de ce modèle dans le chapitre 2, en nous intéressant exclusivement à l'aspect dynamique de ce modèle. Nous allons maintenant présenter les aspects algébriques. Pour des raisons de clarté, nous commençons par redonner les définitions. Pour plus de détails sur ces thèmes, voir par exemple [48, 61].

3.1 Définitions

3.1.1 Le modèle

Le modèle du tas de sable abélien sur la grille est défini de la façon suivante : une *configuration* sur une grille rectangulaire de $n \times p$ cases est une répartition de grains (de sable) sur les cases de la grille. La règle du modèle est alors la suivante : si une case contient 4 grains ou plus, alors cette case est dite *instable* et on l'*éboule*. Cette case perd 4 grains et en donne un à chacune de ses voisines. Si la case a moins de 4 voisines parce qu'elle est située sur le bord ou sur un coin de la grille, alors des grains tombent à l'extérieur de la grille et disparaissent.

Ce modèle a ensuite été étendu aux multi-graphes : soit G un multigraphe non orienté connexe où un sommet est distingué (nous appellerons ce sommet le *puits* et nous le désignerons par $\perp$). Dans nos figures, nous représentons toujours le puits par un sommet grisé. Une configuration du modèle est alors une répartition de grains sur les sommets du graphe et la règle d'évolution est la suivante : si un sommet x différent du puits contient au moins $d(x)$ grains, alors ce sommet est dit *instable* et on l'éboule. Il perd $d(x)$ grains et,

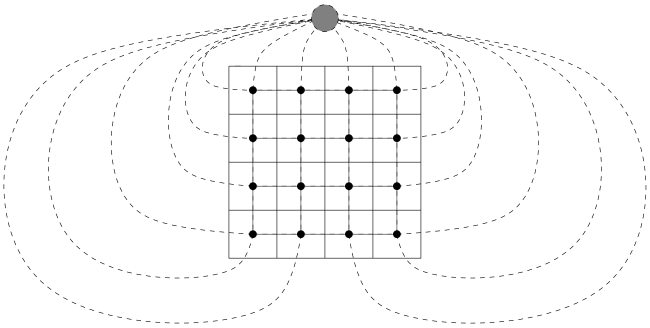


FIG. 3.1 – *Le graphe dual de la grille*

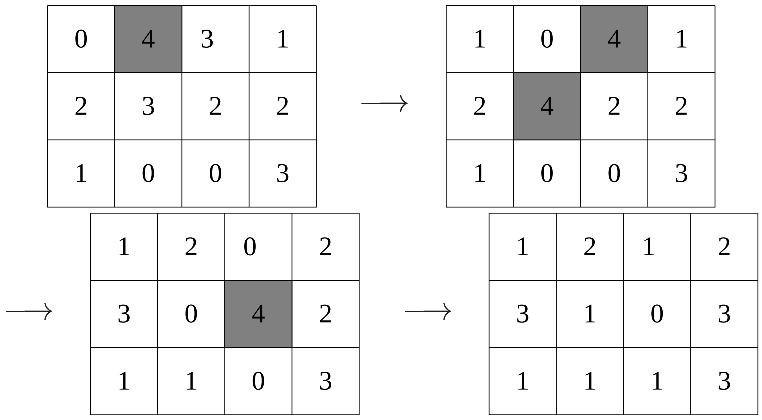


FIG. 3.2 – *Un exemple d'avalanche dans le TSA sur la grille* 3×4

pour chacun de ses voisins y, donne $d(x, y)$ grains à y. Le puits ne peut jamais être éboulé, aussi nous ne considérons pas le nombre de grains qu'il contient. Si G est un graphe à $n+1$ sommets $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = \perp$, nous disons alors qu'une configuration est un élément de $\mathbb{N}^n$. On constate que, si l'on éboule un sommet x, le nombre de grains dans le graphe reste le même si x n'est pas voisin du puits, et décroît si x a au moins une arête vers le puits (on considère que les grains arrivant dans le puits sont perdus).

Ce modèle est bien une extension du modèle défini sur la grille. Si l'on considère en effet une grille et son graphe dual G, en choisissant comme puits pour G le sommet représentant l'extérieur de la grille (voir la figure 3.1), alors le modèle original sur la grille et le modèle étendu défini sur G se comportent bien de la même manière.

Étant donnés une configuration u sur un graphe $G = (V, E)$ et un sommet x de V, on note u_x le nombre de grains contenus dans le sommet x. On dit alors indifféremment que x contient u_x grains ou que la valeur de x est u_x. Une configuration est *stable* si aucun éboulement n'est possible dans cette configuration, c'est-à-dire si chaque sommet contient strictement moins de grains que son degré.

On appelle *avalanche* une suite d'éboulements. On constate que toute avalanche est nécessairement finie. En effet, il existe au moins un sommet qui ne s'éboule qu'un nombre fini de fois, car le puits, par définition, ne s'éboule jamais. Or, si une avalanche est infinie, l'ensemble des sommets qui s'éboulent une infinité de fois a donc au moins un voisin, car le graphe est connexe. Soit x un de ces voisins (x peut être le puits), x ne s'éboule qu'un nombre fini de fois. x reçoit un grain à chaque fois qu'un de ses voisins s'éboule et, comme x ne s'éboule qu'un nombre fini de fois, un nombre infini de grains s'accumule donc dans x. Le nombre de grains présents dans le graphe étant fini, on obtient une contradiction.

On appelle avalanche *maximale* toute avalanche qui ne peut pas être prolongée par l'éboulement d'un sommet. Par définition, toute avalanche maximale mène à une configuration stable. La figure 3.2 présente un exemple d'avalanche maximale.

Comme nous avons vu dans la section 2.2 que le TSA est un cas particulier du CFG, et que ce modèle est convergent, on en déduit que, si dans une configuration plusieurs sommets sont instables, l'ordre dans lequel les éboulements se produisent n'a pas d'importance : la configuration finale obtenue en provoquant une avalanche maximale sera la même quel que soit l'ordre choisi pour les éboulements. Si u est une configuration instable et que v est la configuration stable obtenue à partir de u en pratiquant une avalanche maximale, on dit que v est la configuration obtenue en *relaxant* u, et on le note $\hat{u} = v$.

Dans la suite, pour tout graphe et pour tout entier k, on notera $\boxed{\mathrm{k}}$ la configuration telle que chaque sommet du graphe contient exactement k grains.

Dans la suite, nous ne considèrerons pas nécessairement des configurations positives. Si on considère un graphe G à $n+1$ sommets $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = \perp$, une configuration sera donc un élément de $\mathbb{Z}^n$. Parmi toutes les configurations (positives ou non), certaines jouent un rôle particulier :

Définition 3.1 (Opérateurs d'éboulements, Δ_i,β) *Pour chaque sommet i d'un graphe G, on appelle* opérateur d'éboulement *de i et on note Δ_i la configuration telle que :*
- $\Delta_{ii} = -d(i)$ *;*
- *pour tout $j \neq i$, $\Delta_{ij} = d(i,j)$*

(Δ_i est la configuration telle que le sommet i contient $-d(i)$ grains et que les autres sommets contiennent autant de grains qu'ils ont d'arêtes vers i).

On note β la configuration telle que, pour tout i, $\beta_i = d(i, \perp)$. β est la configuration où chaque sommet contient autant de grains qu'il a d'arêtes vers le puits.

On remarque que si u est une configuration sur G, alors la configuration v obtenue à partir de u en éboulant le sommet i est donnée par :

$$v = u + \Delta_i,$$

où $+$ représente la somme de deux vecteurs composante par composante.

La configuration w obtenue à partir de u en éboulant le puits est donnée par :

$$w = u + \beta.$$

On remarque que, si $\perp = x_{n+1}$, alors la configuration β est exactement la configuration Δ_{n+1}. Nous lui donnons un nom différent afin de bien distinguer le rôle particulier que joue le puits dans le modèle.

On appelle *ébouler de force* un sommet x le fait d'ébouler x quelque soit le nombre de grains qu'il contient. Lorsqu'on éboule de force un sommet, le nombre de grains qu'il contient peut devenir négatif. On appelle *éboulement du puits* l'opération qui consiste à ajouter $d(x, \perp)$ grains sur chaque sommet x voisin du puits. Par exemple, sur la grille, ébouler le puits consiste à ajouter un grain sur chaque sommet situé sur le bord, et deux grains sur les coins. On appelle *anti-éboulement* d'un sommet x l'opération qui consiste à rajouter $d(x)$ grains sur x et à enlever $d(x, y)$ grains à chaque voisin y de x. On constate qu'anti-ébouler un sommet x est strictement équivalent, au niveau de la configuration obtenue, au fait d'ébouler de force tous les autres sommets du graphe, le puits y compris. Ceci se traduit par l'égalité suivante sur les opérateurs d'éboulements :

$$\Delta_i = -\sum_{j \neq i} \Delta_j,$$

ou, de façon équivalente :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i = 0 \tag{3.1}$$

Nous utiliserons ce résultat dans la suite pour nous dispenser de considérer l'opérateur d'éboulement du puits Δ_{n+1}. Sauf mention contraire, une somme d'opérateurs d'éboulements ne contiendra pas Δ_{n+1}.

Les opérateurs d'éboulements sont *abéliens* (ou commutatifs) au sens suivant : pour tous sommets i, j, la configuration que l'on obtient en éboulant le sommet i puis le sommet j est identique à celle obtenue en éboulant j puis i. Autrement dit :

$$\Delta_i + \Delta_j = \Delta_j + \Delta_i.$$

Si u est une configuration d'un graphe G à $n+1$ sommets et que l'on passe de u à une configuration v en éboulant (de force ou non) chaque sommet i e_i fois, alors la configuration v est bien définie par $v = u + \sum_{i=1}^{n+1} e_i \Delta_i$, car l'ordre dans lequel on éboule les sommets ne change pas la configuration obtenue.

Définition 3.2 (Configurations équivalentes, relation $\mathcal{R}$) *On dit que deux configurations u et v sur $\mathbb{Z}^n$ sont* équivalentes*, et on note $u\mathcal{R}v$, si on peut passer de u à v par une suite d'éboulements et d'anti-éboulements des sommets du graphe, c'est-à-dire si $v = u + \sum_{i=1}^{n+1} e_i \Delta_i$, avec $e_i \in \mathbb{Z}$.*

On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ définit bien une relation d'équivalence.

3.1.2 Configurations récurrentes

Nous avons dit plus haut que ce modèle a été étudié en tant que représentant typique du phénomène de SOC. Cela signifie que certaines configurations de ce modèle correspondent à des états critiques. Nous allons étudier ces configurations, que l'on appelle *récurrentes*. Il existe de nombreuses façons de les définir. Nous commençons donc par en donner une idée intuitive, puis nous donnons quelques propositions qui permettent de les caractériser.

Soit G un graphe. Considérons une suite infinie de configurations stables de G définie de la façon suivante : soit u une configuration stable quelconque, qui est la première configuration de la suite. On obtient la configuration suivante en procédant comme suit :

- on choisit aléatoirement un sommet et on ajoute un grain sur ce sommet ;
- on relaxe la configuration. La configuration stable obtenue est la suivante dans la suite.

Le nombre de configurations stables possibles pour G étant fini, certaines configurations apparaissent un nombre infini de fois dans cette suite. On appelle ces configuration les *configurations récurrentes* de G [24]. L'ensemble des configurations récurrentes de G ne dépend pas de la configuration u par laquelle la suite commence [23].

Les configurations récurrentes forment les états critiques du modèle. Sur une grille carrée, si l'on étudie la distribution de la taille des avalanches qui se produisent lorsqu'on ajoute un grain sur un sommet choisi aléatoirement d'une configuration récurrente, on constate qu'elle suit une loi de puissance. D'autre part, d'après la définition que nous en avons donné, une fois que le système est dans une configuration récurrente, l'ajout de sable ne peut l'amener que vers une autre configuration récurrente : le système reste dans un état critique.

Nous présentons maintenant quelques caractérisations des configurations récurrentes.

Proposition 3.3 *[46] Une configuration u est récurrente si et seulement si la configuration obtenue à partir de u en :*

- *éboulant le puits*
- *relaxant la configuration obtenue*

est égale à u. Autrement dit, u est récurrente si et seulement si $\widehat{u+\beta} = u$. De plus, ceci est équivalent au fait que tous les sommets s'éboulent une fois et une seule lors de la relaxation.

Cette proposition se comprend de la façon suivante : nous avons déjà vu que, dans un graphe G à $n+1$ sommets, quelle que soit la configuration u, si l'on éboule (éventuellement de force) tous les sommets de G, y compris le puits, alors on obtient à nouveau la configuration u. En effet, tout sommet x a perdu $d(x)$ grains, mais en a gagné autant lorsque tous ses voisins se sont éboulés ($\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i = 0$). Donc, si l'on éboule le puits puis qu'on éboule (de force) tous les autres sommets du graphe, la configuration ne change pas, et ce quelle que soit la configuration de départ.

Ce qui caractérise les configurations récurrentes est que, après l'éboulement du puits, il existe une suite légale d'éboulements qui contient tous les sommets, ce qui n'est pas le cas en général.

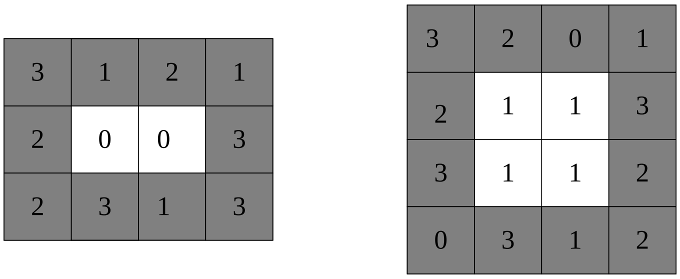


FIG. 3.3 – *Deux configurations non récurrentes sur des grilles*

Ceci nous donne un autre moyen de caractériser les configurations récurrentes. Si, lorsqu'on éboule le puits à partir d'une configuration u, lors de la relaxation un certain ensemble de sommets X ne s'éboule pas, alors u n'est pas récurrente. De plus, si l'on note u_X la restriction de u aux sommets de X, toute configuration v telle que $v_X = u_X$ n'est pas récurrente :

Proposition 3.4 *[46] Soit G un graphe, u une configuration récurrente de G et X un sous-ensemble des sommets de G ne contenant pas le puits. Alors la restriction de u au graphe obtenu en contractant tous les sommets qui ne sont pas dans X en un seul sommet qui joue le rôle du puits est récurrente.*

Cette caractérisation n'est pas un outil pratique de reconnaissance des configurations récurrentes dans le cas général, car il existe un nombre exponentiel de sous-configurations d'une configuration donnée. Cependant, ce résultat peut être utile pour reconnaître rapidement des configurations qui ne sont pas récurrentes.

Par exemple, dans une grille de taille quelconque, toute configuration dans laquelle deux cases adjacentes valent 0 n'est pas récurrente. En effet, si l'on éboule le puits dans une grille $2 \cdot 1$ dont les deux cases valent 0, alors elles reçoivent 3 grains chacune et restent donc stables. Donc, d'après la proposition 3.3, cette configuration n'est pas récurrente, et donc toute configuration où elle apparaît ne l'est pas non plus. Par le même raisonnement, on voit que toute configuration contenant un carré de deux cases sur deux, où chaque case contient au plus un grain, n'est pas récurrente. La figure 3.3 illustre ceci.

Ces deux caractérisations donnent lieu à un algorithme, présenté dans [23], pour calculer l'unique configuration récurrente équivalente à une configuration donnée u. Cet algorithme est appelé *algorithme thermique*. On obtient une suite de configurations stables en partant de $\hat{u}$ (la configuration obtenue en relaxant u si u est instable) et en :

- éboulant le puits ;
- relaxant la configuration obtenue.

D'après la caractérisation des configurations récurrentes donnée dans la proposition 3.3, quand on obtient deux fois de suite la même configuration, cette configuration est récurrente. Comme nous sommes partis de u et que nous n'avons pratiqué que des éboulements et anti-éboulements, cette configuration est équivalente à u.

La caractérisation suivante provient de la définition des configurations récurrentes que nous avons donnée au début de cette section. Les configurations récurrentes sont celles qui apparaissent un nombre infini de fois dans la séquence de configurations qu'on construit en ajoutant des grains. Une configuration qui apparaît après une configuration récurrente dans cette séquence apparaît un nombre infini de fois, elle est donc récurrente :

Proposition 3.5 *Si u est une configuration récurrente, alors toute configuration obtenue en rajoutant des grains à u puis en relaxant est également récurrente.*

Nous attirons l'attention du lecteur sur certaines configurations récurrentes particulières :

Proposition 3.6 *Soit G une grille rectangulaire de taille quelconque. Alors les configurations $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ de G sont récurrentes.*

Preuve : Si l'on éboule le puits à partir de $\boxed{2}$, les quatres coins deviennent instables et toutes les autres cases du bord contiennent trois grains. Lorsqu'on éboule les coins, les cases du bord qui leurs sont adjacentes deviennent à leur tour instables. On peut donc ébouler de proche en proche toutes les cases du bord. Les sommets qui sont adjacents à un ou deux sommets du bord reçoivent alors un ou deux grains, et on peut répéter ce procédé et ébouler finalement tous les sommets de la grille. D'après la proposition 3.3, la configuration $\boxed{2}$ est donc récurrente.

On voit de la même façon que $\boxed{3}$ est également récurrente. □

Ces configurations sont importantes pour l'étude des configurations récurrentes en général car ce sont les deux configurations récurrentes les plus simples de la grille. De plus, $\boxed{3}$ est la plus grande des configurations stables : aucune configuration stable ne contient plus de trois grains dans une de ses cases.

Configurations récurrentes et arbres couvrants

Il a été démontré dans [23] que, pour tout graphe, il y a autant de configurations récurrentes que d'arbres couvrants du graphe. Ceci a donné lieu à deux bijections entre ces deux ensembles.

Dans [46], Majumdar et Dhar utilisent l'algorithme thermique pour donner une bijection naturelle entre l'ensemble des configurations récurrentes d'une grille et les arbres couvrants du dual de cette grille (figure 3.1). Chaque sommet de ce graphe (excepté le puits) est adjacent à quatre arêtes. Ces arêtes correspondent aux quatre directions Nord (N), Est (E), Sud (S) et Ouest (O). Pour chaque sommet, on définit l'ordre suivant sur ces quatres arêtes :

$$\mathrm{N} > \mathrm{E} > \mathrm{S} > \mathrm{O}$$

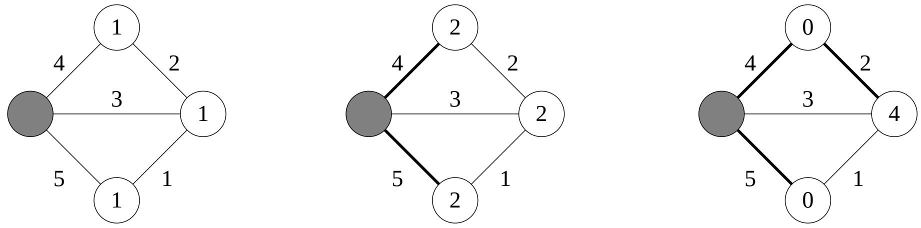


FIG. 3.4 – *Un exemple de la bijection de Dhar et Majumdar*

Soit u une configuration récurrente. Soient $T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}$ les configurations suivantes : $T^{(0)}$ est la configuration obtenue à partir de u en éboulant le puits. Pour chaque i, $1 \leq i \leq k$, $T^{(i)}$ est obtenu à partir de $T^{(i-1)}$ en éboulant tous les sommets qui sont instables dans $T^{(i-1)}$. L'arbre couvrant correspondant à u est alors obtenu en sélectionnant des arêtes de la façon suivante : pour tout sommet a, soit $T^{(i)}$ la configuration parmi celles définies ci-dessus dans laquelle a est instable (d'après la proposition 3.3, il en existe une et une seule). a est relié à p sommets parmi ceux qui ont été éboulés pour atteindre $T^{(i)}$ à partir de la configuration précédente (si $i = 0$, on considère le puits, que l'on a éboulé pour obtenir $T^{(0)}$). Soit n le nombre de grains dans a dans $T^{(i)}$, alors n est compris entre 4 et $4 + p - 1$. Alors on choisit pour a la $(n-3)^{\text{e}}$ arête dans l'ordre défini ci-dessus parmi les p arêtes qui relient a aux sommets instables de $T^{(i-1)}$.

L'ensemble des arêtes qu'on a choisi forme alors un arbre couvrant.

Cette bijection s'étend naturellement au cas des graphes. Il faut dans ce cas se donner, pour chaque sommet, un ordre sur les arêtes qui sont adjacentes à ce sommet. La figure 3.4 donne un exemple de cette bijection. L'arbre couvrant correspondant à la configuration récurrente $(1, 1, 1)$ est l'arbre dont les arêtes sont 2, 4 et 5.

Il est apparu que la correspondance entre le nombre de configurations récurrentes et le nombre d'arbres couvrants d'un graphe peut être raffinée. On définit le *niveau* $niv(u)$ d'une configuration récurrente u de la façon suivante :

$$niv(u) = \sum_{i \neq \perp} u_i - |E| + d(\perp)$$

Il a été prouvé par Merino-López dans [49] que, pour tout graphe, il y a le même nombre de configurations récurrentes de niveau i que d'arbres couvrants d'activité externe i. Nous rappelons à nouveau que ce nombre ne dépend pas de la numérotation des arêtes (théorème 1.2).

Dans [16], les auteurs ont formalisé ce résultat en introduisant une bijection entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants d'un graphe qui respecte cette répartition : une configuration de niveau i correspond à un arbre couvrant d'activité externe i.

Cette bijection utilise un objet intermédiaire : les *parcours décroissants* du graphe. Un parcours décroissant d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq |V|+|E|}$ dans

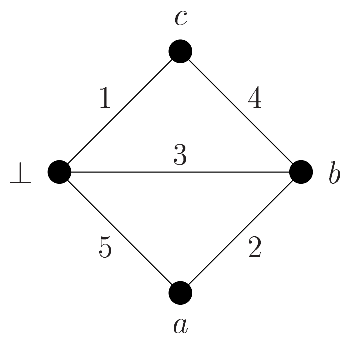


FIG. 3.5 – *Un graphe dont le puits est le sommet* $\perp$.

laquelle chaque arête et chaque sommet apparaissent exactement une fois, et telle que (on note $\sigma^{<i} = \{\sigma_j | j < i\}$ l'ensemble des éléments apparaissant avant i dans σ, et $\sigma^{>i}$ l'ensemble des éléments apparaissant après i dans σ) :

1. $\sigma_1 = \perp$;
2. si σ_i est un sommet de $V \setminus \{\perp\}$ alors σ_{i-1} est une arête incidente à σ_i ;
3. si σ_i est une arête, alors elle est la plus grande parmi toutes les arêtes n'apparaissant pas dans $\sigma^{<i}$ et qui sont adjacentes à un sommet de $\sigma^{<i}$.

On a alors les deux résultats suivants sur les parcours décroissants :

Lemme 3.7 *[16] Les parcours décroissants d'un graphe $G = (V, E)$, de puits $\perp \in V$, sont en bijection avec les arbres couvrants de G.*

À partir d'un parcours décroissant σ, on obtient un arbre couvrant dont les arêtes sont celles qui précèdent immédiatement les sommets dans σ, c'est-à-dire celles de $\{\sigma_{k-1} | \sigma_k \in V \setminus \{\perp\}\}$. Réciproquement, à partir d'un arbre couvrant A dont les arêtes sont $E(A)$, on peut toujours construire un parcours décroissant tel qu'un sommet apparaît immédiatement après chaque arête de $E(A)$.

Lemme 3.8 *[16] Les parcours décroissants d'un graphe $G = (V, E)$, de puits $\perp \in V$, sont en bijection avec les configurations récurrentes de G.*

À partir d'un parcours décroissant σ, on obtient une configuration récurrente en plaçant dans chaque sommet σ_i autant de grains que d'arêtes adjacentes à σ_i apparaissant dans $\sigma^{>i}$. Réciproquement, à partir d'une configuration récurrente u, on peut toujours construire un parcours décroissant σ tel que u_i arêtes apparaissent après le sommet i dans σ.

On obtient donc une bijection entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants. Pour obtenir la configuration récurrente correspondant à un arbre couvrant donné, on commence par construire le parcours décroissant correspondant à cet arbre couvrant, puis on construit la configuration récurrente correspondant à ce parcours. La figure 3.6 donne un exemple de cette bijection.

Nous concluons de ces deux bijections que, d'une part, le nombre de configurations récurrentes d'un graphe G ne dépend pas du choix du puits parmi tous les sommets de G

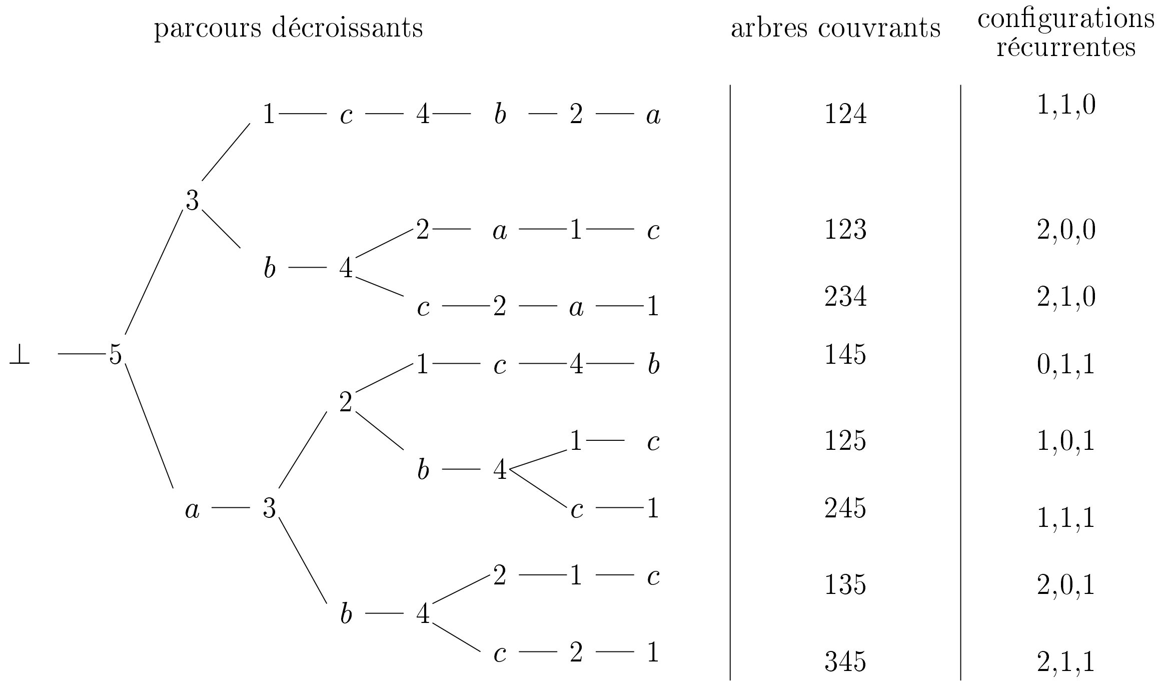


FIG. 3.6 – *Un exemple de la bijection entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants utilisant les parcours décroissants, pour le graphe de la figure 3.5*

et que, d'autre part, le nombre de configurations récurrentes d'un niveau donné ne dépend pas non plus du puits.

Groupe des configurations récurrentes

Nous nous intéressons maintenant à la structure algébrique des configurations d'un graphe. L'ensemble des configurations quelconques (sur $\mathbb{Z}^n$) forme naturellement un groupe abélien pour l'addition (la somme de deux configurations étant la configuration obtenue en faisant la somme sommet par sommet du nombre de grains des deux configurations). La relation $\mathcal{R}$ étant une relation d'équivalence, l'ensemble des configurations sur $\mathbb{Z}^n$ quotienté par $\mathcal{R}$ est également un groupe abélien. Or, on a le résultat suivant :

Théorème 3.9 *[24, 17] Dans chaque classe de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, il y a une et une seule configuration récurrente.*

Ce résultat se comprend de la façon suivante : à partir d'une configuration quelconque de $\mathbb{Z}^n$ d'un graphe G à $n+1$ sommets, en pratiquant des opérations d'éboulements et d'anti-éboulements, d'une part, on peut toujours atteindre une configuration récurrente et, d'autre part, on ne peut en atteindre qu'une.

Comme il y a une et une seule configuration récurrente par classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, les configurations récurrentes peuvent être vues comme les représentants naturels des éléments du groupe. Étant donnée une configuration quelconque u, on note $\bar{u}$ l'unique configuration récurrente qui est dans la même classe que u.

L'ensemble des configurations récurrentes a donc la propriété de former un groupe abélien [46, 17].

On définit l'addition $\oplus$ de deux configurations récurrentes u et v de la façon suivante : on prend la configuration qui est la somme sommet par sommet des configurations u et v, et on relaxe cette configuration. Comme cette configuration est obtenue en ajoutant des grains à u qui est récurrente et en pratiquant la relaxation, d'après la proposition 3.5, elle est récurrente. En d'autres termes, $u \oplus v = \widehat{u+v}$.

Le diagramme suivant est donc commutatif (u et v sont deux configurations quelconques et $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont les configurations récurrentes qui leur sont équivalentes) :

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & \bar{u} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u+v & \longrightarrow & \overline{u+v} \end{array}$$

Nous avons déjà vu que le nombre de configurations récurrentes d'un graphe G ne dépend pas du sommet qui est choisi pour jouer le rôle du puits. Un résultat plus fort a été démontré dans [17] : étant donné un graphe G, la structure du groupe des configurations récurrentes de G ne dépend pas du choix du puits dans G. En d'autres termes, tous les groupes des configurations récurrentes d'un même graphe, mais avec des puits différents, sont isomorphes.

3.1.3 Nombre d'éboulements

Nous allons dans la suite nous intéresser fréquemment au nombre d'éboulements qui se produisent pendant la relaxation d'une configuration instable. Nous présentons maintenant deux résultats qui permettent de borner ce nombre d'éboulements.

Lemme 3.10 *Soit u une configuration positive d'un graphe G à n sommets $V = (v_1, \ldots, v_n)$, et soit t_i le nombre de fois que le sommet v_i s'éboule pendant la relaxation de u (c'est-à-dire que les t_i sont tels que $\hat{u} = u + \sum t_i \Delta_i$). Soit e un vecteur à coefficients positifs de taille n. Soit v la configuration obtenue en éboulant de force chaque sommet v_i e_i fois (c'est-à-dire $v = u + \sum e_i \Delta_i$). Alors si v est moins que stable (c'est-à-dire pour tout i, $v_i < d(i)$) alors pour tout i on a : $t_i \leq e_i$.*

Preuve : Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur la somme des t_i. Si $\sum t_i = 0$, alors u est stable et le résultat est vrai. Sinon, soit k un sommet instable dans u. La configuration u' obtenue en éboulant k (c'est-à-dire $u' = u + \Delta_k$) est telle que $\sum t'_i = \sum t_i - 1$. Si on définit le vecteur e' comme :
- $e'_j = e_j$ si $j \neq k$, et
- $e'_k = e_k - 1$,

alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et on obtient que pour tout i, $t'_i \leq e'_i$. De ceci on déduit que $t_i \leq e_i$. □

Ce théorème permet d'obtenir une majoration du nombre d'éboulements de chaque sommet lors de la relaxation. Étudions maintenant le problème inverse, c'est-à-dire comment obtenir une minoration de ce nombre d'éboulements. Nous aurons pour cela besoin du résultat suivant :

Lemme 3.11 *Si u est une configuration stable et que v est la configuration obtenue à partir de u en éboulant (de force) le sommet i (c'est-à-dire $v = u + \Delta_i$), alors la configuration $\hat{v}$ n'est pas récurrente.*

Preuve : Soit Y l'ensemble des sommets qui s'éboulent lors de la relaxation de v. Y est nécessairement connexe. Chaque sommet de Y s'éboule une seule fois lors de la relaxation. Sinon, si S est une suite d'éboulements menant de v à $\hat{v}$, soit x le premier sommet dans S qui s'éboule une deuxième fois. x a perdu $d(x)$ grains lorsqu'il s'est éboulé, il en a gagné au plus $d(x)$ de ses voisins s'ils se sont tous éboulés, donc x contient juste avant de s'ébouler une deuxième fois au plus $u_x - d(x) + d(x) = u_x$ grains. Comme u est stable, x ne peut pas s'ébouler une deuxième fois et on obtient une contradiction.

Chaque sommet x de Y contient dans $\hat{v}$ au plus $d(x) - \sum_{x' \notin Y} d(x, x') - 1$ grains. En effet, $u_x < d(x)$, et x a reçu exactement $d(x) - \sum_{x' \in Y} d(x, x')$ grains lors de la relaxation, et en a perdu $d(x)$ lorsqu'il s'est éboulé. Si on éboule tous les sommets de $V \setminus Y$, alors tous les sommets de Y restent instables. D'après la proposition 3.3, $\hat{v}$ n'est donc pas récurrente.
□

Théorème 3.12 *Soit u une configuration instable d'un graphe G à n sommets $V = (v_1, \ldots, v_n)$ telle que $\hat{u}$ est récurrente, et soit t_i le nombre de fois que le sommet v_i s'éboule pendant la relaxation de u :*

$$\hat{u} = u + \sum t_i \Delta_i.$$

Si e est un vecteur positif et que la configuration v telle que l'on passe de u à v en éboulant chaque sommet i e_i fois :

$$v = u + \sum e_i \Delta_i$$

est supérieure à une configuration récurrente, alors pour tout i on a : $t_i \geq e_i$.

Preuve : Soit r_i le nombre de fois qu'il faut ébouler le sommet i pour atteindre $\hat{v}$ à partir de v :

$$\hat{v} = v + \sum r_i \Delta_i.$$

Si v est stable, pour tout i $r_i = 0$. Soit, pour tout i $e'_i = e_i + r_i$.

$$\hat{v} = u + \sum e'_i \Delta_i.$$

On a pour tout i, $e'_i \geq e_i$. Remarquons que la configuration $\hat{v}$ est récurrente (comme v est supérieure à une configuration récurrente, d'après la proposition 3.5, $\hat{v}$ est récurrente). Nous allons montrer que $t_i \geq e'_i$, et donc que $t_i \geq e_i$. Soit X l'ensemble des sommets i tels

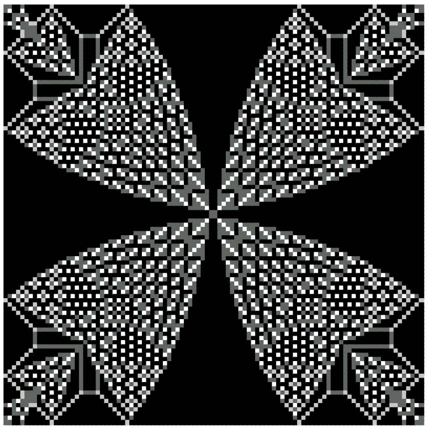


FIG. 3.7 – $\bar{4}$ *sur une grille* 100×100

que $e'_i > t_i$. D'après le lemme 3.11, la configuration obtenue à partir de $\hat{v}$ en éboulant un sommet quelconque n'est pas récurrente, donc la configuration obtenue en éboulant chaque sommet i de X $e'_i - t_i$ fois n'est pas récurrente, et ne peut donc être égale à $\hat{u}$. Donc aucun sommet n'est tel que $e'_i > t_i$, et on a bien le résultat annoncé.

$\square$

3.2 Problématiques

Nous allons maintenant présenter un aperçu des questions auxquelles nous nous intéressons à propos de ce modèle et du type de réponses qui y ont été apportées.

Commençons par étudier l'exemple suivant : une question naturelle est de savoir, étant donnée une grille rectangulaire, quelle configuration stable est obtenue lorsqu'on relaxe la configuration $\boxed{4}$, qui est celle où chaque case contient exactement 4 grains. Remarquons tout d'abord que cette configuration est récurrente. En effet, $\boxed{4}$ est obtenue en ajoutant des grains à $\boxed{3}$, qui elle est récurrente. D'après la proposition 3.5, la configuration obtenue en relaxant $\boxed{4}$ est donc récurrente. Nous appelons $\bar{4}$ cette configuration. La figure 3.7 montre la configuration obtenue sur une grille 100×100. Cette configuration est représentée de la façon suivante : comme cette configuration est stable, chaque case contient entre 0 et 3 grains. Nous avons donc associé un niveau de gris au nombre de grains contenus dans une case (noir pour 0, blanc pour 4), et représenté chaque case par un point du niveau de gris correspondant.

Sur cet exemple, on voit clairement que la question est plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord : en partant d'une configuration uniforme, on obtient une configuration dont la structure est difficile à décrire. Cette configuration semble de plus être auto-similaire. Chaque coin de la grille contient un motif triangulaire dont un coin est au centre de la grille, et les autres coins sur les bords de la grille. Dans la partie contenue entre un des

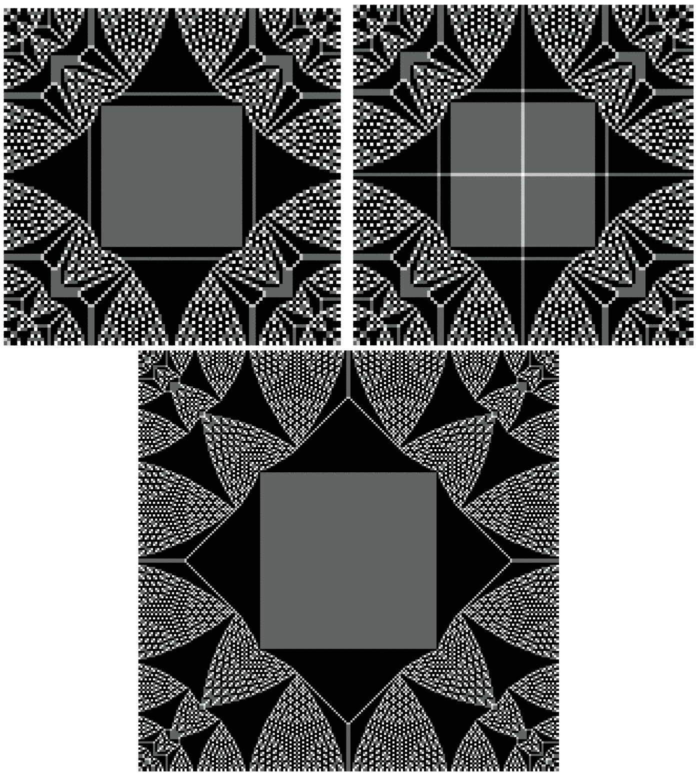


FIG. 3.8 – *L'identité sur les grilles* 100×100, 101×101 *et* 200×200.

coins de la grille et les deux coins de ce motif, un autre motif triangulaire de même forme que le premier, mais plus petit, est présent. Dans la figure 3.7, on observe un troisième motif dans le coin de la grille.

Lorsque la taille de la grille augmente, le nombre de ces motifs augmente également, et ils gardent les mêmes proportions. La complexité de la question peut se résumer de la façon suivante : étant donnée une grille, on sait calculer la configuration $\bar{4}$ Il a été montré que ce calcul se fait en $\mathcal{O}(n^2)$, où n est le nombre de cases de la grille. Mais on ne sait pas calculer plus vite (par exemple en $\mathcal{O}(n)$) cette configuration qu'en effectuant effectivement tous les éboulements. En fait, il est conjecturé que ce problème est P-complet [50], et qu'il n'existe pas de moyen plus rapide de calculer cette configuration que d'effectuer les éboulements explicitement.

Une question qui a beaucoup soulevé d'intérêt est l'étude de l'élément neutre du groupe des configurations récurrentes, que nous appellerons dans la suite *l'identité* [13, 18].

Nous présentons dans la figure 3.8 des exemples d'identités sur différentes grilles carrées. Il a été universellement constaté que, si la grille considérée est carrée et de côté pair, alors l'identité a toujours la même forme générale. On constate effectivement que l'identité sur la grille 200×200 semble être, à quelques détails près, un agrandissement de l'identité sur la grille 100×100. Le centre est occupé par un carré dans lequel toutes les cases contiennent deux grains. Sur les bords de ce carré sont accolés des motifs triangulaires. La configuration présente une forte structure auto-similaire : dans chaque coin de la grille on voit deux grands motifs triangulaires. Dans la partie de la grille comprise entre le coin et ces deux motifs, des motifs plus petits mais de même forme apparaissent. On voit sur la figure que, plus la taille de la grille est grande, plus le nombre de tels motifs qu'on voit dans chaque coin est grand.

Tous les motifs triangulaires que nous avons décrits peuvent être ou non parcourus par des lignes, ainsi qu'on peut le voir sur la figure. C'est la seule différence qu'on constate à l'œil nu entre les différentes identités sur des grilles carrées de côté pair.

À l'heure actuelle, et malgré d'importants efforts de recherche, aucune preuve n'est connue sur aucun des aspects de la structure de l'identité sur une grille carrée.

Un autre aspect intrigant de l'identité est la similitude entre l'identité $I_{2p,2p}$ sur la grille $2p \times 2p$ et l'identité $I_{2p+1,2p+1}$ sur la grille $(2p+1) \times (2p+1)$. Comme on le voit sur la figure 3.8 pour les grilles 100×100 et 101×101, $I_{2p+1,2p+1}$ semble être obtenue à partir de $I_{2p,2p}$ en insérant une ligne et une colonne au milieu de cette configuration. La valeur des cases insérées est obtenue de la façon suivante (comme la configuration $I_{2p,2p}$ est symétrique, chaque case est insérée entre deux cases qui ont la même valeur) :

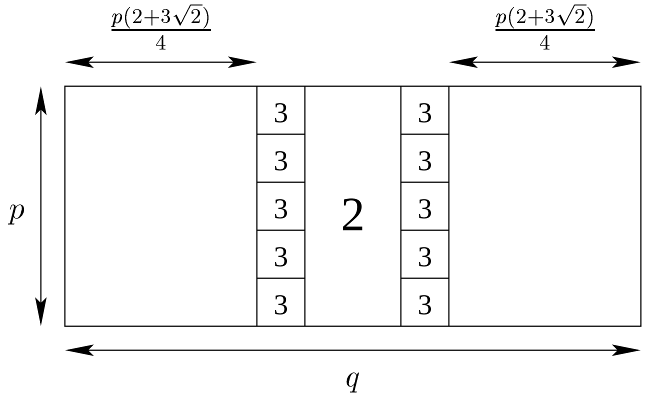
- si les cases entre lesquelles on l'insère contiennent 3 grains, cette case en contient deux ;
- si les cases entre lesquelles on l'insère contiennent 2 grains, elle en contient un ;
- la case centrale contient zéro grains.

Expérimentalement, il a été vérifié que les cases entre lesquelles les nouvelles cases sont insérées contiennent toujours soit deux, soit trois grains, mais jamais zéro ou un grain.

À nouveau, ce résultat a été universellement constaté, mais aucune preuve n'en a été donnée.

Nous présentons maintenant un des seuls résultats existants sur la structure de l'identité sur une grille rectangulaire.

Théorème 3.13 *[13] L'identité sur une grille rectangulaire de côtés p par q ($q \geq p(2+3\sqrt{2})/2$) est formée de deux bords symétriques l'un de l'autre de taille $p(2+3\sqrt{2})/4 \times p$ et d'une bande centrale 2-uniforme de taille $q - p(2+3\sqrt{2})/2$, bordée de deux colonnes formées de trois grains dans chaque case.*



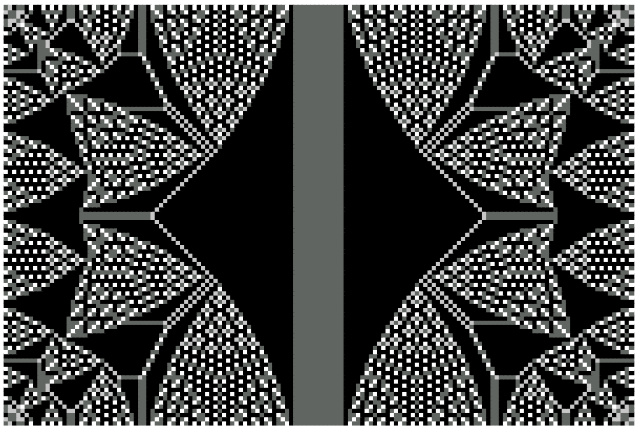


FIG. 3.9 – *L'identité sur une grille* 100×150

La figure 3.9 montre un exemple de la configuration identité sur une telle grille. Il est intéressant de constater que si l'on continue à allonger le rectangle, la seule modification que cela entraîne pour l'identité est l'élargissement de la bande de 2 du milieu. Les côtés de la configuration ne changent pas.

Nous reviendrons dans la partie III sur l'étude des configurations récurrentes.

Deuxième partie

Chip Firing Games

Chapitre 4

Étude du Chip Firing Game

Ce chapitre est consacré à l'étude du Chip Firing Game (CFG). Il ressort en effet des résultats présentés dans le chapitre 2 que le CFG est un modèle central pour l'étude d'une certaine famille de modèles dynamiques discrets. En effet, le CFG étant une généralisation de ces modèles, ils partagent les propriétés des CFG.

Dans la section 4.1, nous introduisons la notion de CFG *simple* et nous montrons que l'étude des CFG peut se ramener à celle des CFG simples. Nous utilisons cette notion pour montrer de façon intuitive que les espaces des configurations des CFG sont des treillis. Dans la section 4.2, nous étudions la classe des treillis qui sont l'espace des configurations d'un CFG. Dans la section 4.3, nous présentons une généralisation du modèle, le CFG *coloré*, qui engendre plus de treillis que le CFG classique.

4.1 Les Chip Firing Game simples

Dans cette section, nous introduisons la notion de CFG *simple*. Nous allons voir que tout CFG est équivalent, au sens des espaces des configurations, à un CFG simple, ce qui va permettre de donner une nouvelle preuve, plus naturelle, du fait que l'espace des configurations d'un CFG est un treillis, et que ce treillis est SLD. Ce résultat illustre à notre avis comment une bonne compréhension du modèle permet de donner une interprétation intuitive des résultats obtenus. On rappelle que le nombre d'éboulements de chaque sommet est le même, quelle que soit la séquence choisie (théorème 2.15).

Définition 4.1 *Un CFG convergent est* simple *si aucun sommet n'est éboulé plus d'une fois lors d'une avalanche maximale.*

On remarque qu'un CFG simple est nécessairement convergent. Le mot *simple* vient de la théorie des langages. Si on représente chaque sommet x_i du support du CFG par une lettre a_i, on peut associer à chaque avalanche $(x_1, \ldots, x_n)$ le mot $a_1, \ldots, a_n$. Le langage associé à un CFG est alors l'ensemble de tous les mots associés à toutes les avalanches possibles (maximales ou non). Un langage est dit *simple* si aucun mot ne contient deux fois la même lettre. Ceci est clairement le cas pour les langages des CFG simples, d'où leur nom. Nous reviendrons plus tard sur les propriétés de ces langages.

Le mot simple convient également tout à fait pour ces CFG car, comme nous allons le voir, l'étude de la structure de leurs espaces des configurations est plus aisée que dans le cas général.

Comme nous nous intéressons ici aux espaces des configurations des CFG, et non pas à la structure du graphe ou à la configuration initiale, nous dirons que deux CFG sont *équivalents* si leurs espaces des configurations sont isomorphes.

Nous allons maintenant voir que l'on peut se limiter à l'étude des CFG simples, en toute généralité.

Théorème 4.2 *Tout CFG convergent est équivalent à un CFG simple.*

Preuve : L'idée de la preuve est la suivante : soit C un CFG convergent de support $G = (V, E)$ et de configuration initiale σ qui n'est pas simple. Il y a donc un sommet a de G qui est éboulé plus d'une fois lors d'une avalanche maximale. Nous construisons un CFG C' équivalent à C, dans lequel nous remplaçons a par deux sommets a_0 et a_1. Ils sont éboulés tour à tour dans C' à chaque fois que a est éboulé dans C. Les sommets a_0 et a_1 sont donc chacun éboulés strictement moins souvent que a. En itérant ce procédé on obtient donc finalement un CFG simple.

Dans la suite, pour un sommet x de G, on note $l(x)$ le nombre de boucles sur le sommet x, et on désigne par $d^>(x)$ le nombre d'arcs sortants de x qui ne sont pas des boucles : $d^>(x) = d^-(x) - l(x)$. Nous définissons de manière symétrique $d^<(x) = d^+(x) - l(x)$. Enfin nous définissons l'entier N comme étant deux fois le nombre de grains présents dans C.

Nous définissons le CFG C', de support $G' = (V', E')$, de la façon suivante :
- $V' = V \backslash \{a\} \cup \{a_0, a_1\}$, avec $a_0, a_1 \notin V$;
- E' est défini de la façon suivante :
  - pour tous $x, y \in V \backslash \{a\}$, si E contient n arcs (x, y) , alors E' contient $2n$ arcs (x, y) ;
  - pour chaque arc (x, a), $x \neq a$ dans E, E' contient un arc (x, a_0) et un arc (x, a_1) ;
  - pour chaque arc (a, x), $x \neq a$ in E, E' contient deux arcs (a_0, x) et deux arcs (a_1, x) ;
  - pour chaque boucle (a, a) dans E, E' contient une boucle (a_0, a_0) et une boucle (a_1, a_1) ;
  - E' contient $N - {d_G}^>(a)$ arcs (a_0, a_1) et autant d'arcs (a_1, a_0) ;
- La configuration intiale σ' de C' est définie par :
  - ${\sigma'}_{a_0} = \sigma_a + N$;
  - ${\sigma'}_{a_1} = \sigma_a$;
  - ${\sigma'}_x = 2\sigma_x$, pour tout $x \neq a_0, a_1$.

La figure 4.1 illustre cette construction.

Soit $2C$ le CFG obtenu à partir de C en mutipliant par deux la configuration initiale de tous les sommets, anisi que le nombre d'arcs entre chaque paire de sommets. On voit facilement que $2C$ est équivalent à C. Dans la suite, nous allons montrer que C' est équivalent

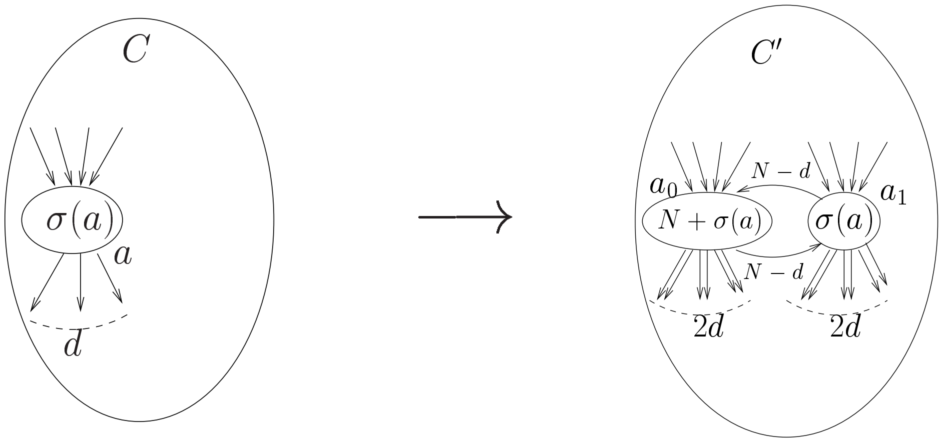


FIG. 4.1 – *Simplification d'un CFG*

à $2C$, et donc à C.

On remarque que, à l'exception des deux sommets a_0 et a_1, C' est identique à $2C$ et se comporte de la même façon : pour tous les sommets à l'exception de a_0 et a_1, les prédécesseurs et les successeurs de chaque sommet sont les mêmes dans C' et dans $2C$. Donc, si les éboulements de a_0 et a_1 ont bien lieu à tour de rôle, chacun prenant la place d'un éboulement de a, alors nous pouvons montrer facilement que $L(C')$ est isomorphe à $L(2C)$, et donc à $L(C)$.

Nous allons raisonner sur toutes les avalanches valides, en montrant qu'il y a une bijection entre toutes les séquences valides de $2C$ et celles de C', et que cette bijection conserve la relation de couverture, et est donc un isomorphisme de treillis. Cette bijection respecte les propriétés suivantes : chaque avalanche s dans $2C$ mène à une configuration σ. Si s correspond à une avalanche s' dans C', et que s' mène à une configuration σ', alors σ et σ' vérifient la propriété 4.1 et l'une des deux propriétés 4.2 ou 4.2$'$:

$$\text{pour tout } x \neq a_0, a_1, {\sigma'}_x = \sigma_x \tag{4.1}$$

$${\sigma'}_{a_0} = N + \sigma_a/2, \text{ et } {\sigma'}_{a_1} = \sigma_a/2 \tag{4.2}$$

$${\sigma'}_{a_0} = \sigma_a/2, \text{ et } {\sigma'}_{a_1} = N + \sigma_a/2 \tag{4.2$'$}$$

Pour obtenir s' à partir de s, il suffit de remplacer dans s toutes les occurrences de a par des occurrences de a_0 et de a_1, alternativement.

Les configurations initiales de C et de C' satisfont les propriétés 4.1 et 4.2. Soient s une avalanche de $2C$ et s' la séquence correspondante dans C', telles que les configurations obtenues σ et σ' vérifient les propriétés 4.1 et 4.2.

Soit x un sommet de $2C$ instable dans la configuration σ. Si x est différent de a, x est également instable dans C', et son éboulement dans C' et $2C$ conduit à des configurations qui vérifient toujours les propriétés 4.1 et 4.2. En effet, les arcs sortants de x sont les mêmes dans $2C$ et dans C', à l'exception des arcs vers a : si x donne n grains à a dans $2C$ lors de son éboulement, il va donner $n/2$ grains à a_0 et autant à a_1 lors de son éboulement dans C', ce qui ne modifie pas les propriétés ci-dessus.

Maintenant si x est égal à a, alors a_0 est instable dans C' dans la configuration σ'. En effet, si a contient n grains dans $2C$, a_0 en contient $N+n/2$ dans C', d'après la propriété 4.1. Or, le degré sortant de a_0 dans C' est $2{d_0}^{>}(a) + l_0(a) + (N - {d_0}^{>}(a)) = N + {d_0}^{-}(a)$, et le degré sortant de a dans $2C$ est $2d^{-}(a)$. Donc a_0 est instable dans C' si et seulement si a est instable dans C. Soient σ_2 (resp. ${\sigma_2}'$) les configurations obtenues à partir de σ (resp. σ') en éboulant a (resp. a_0). Nous allons montrer que ces configurations satisfont les propriétés 4.1 et 4.2$'$:

- pour tout $x \neq a_0, a_1, d(a_0, x) = 2d(a, x)$, donc la propriété 4.1 est vérifiée ;
- nous avons ${\sigma_2}_a = \sigma_a - {d_0}^{>}(a)$, et $\sigma'_{2a_0} = {\sigma'}_{a_0} - {d_0}^{>}(a_0) = N + \sigma_a - (N + {d_0}^{>}(a)) = {\sigma_2}_a$. Le nombre de grains dans a_1 devient : $\sigma'_{2a_1} = {\sigma'}_{a_1} + N - {d_0}^{>}(a) = \sigma_a + N - {d_0}^{>}(a) = {\sigma_2}_a + N$, donc la propriété 4.2$'$ est vérifiée.

Si deux avalanches produisent des configurations vérifiant les propriétés 4.1 et 4.2$'$, le même raisonnement s'applique.

Nous avons montré que les avalanches de C' sont en bijection avec les avalanches de $2C$, et que la relation de couverture est respectée. Donc l'espace des configurations de C' est isomorphe à celui de $2C$, et par conséquent à celui de C. Donc C' est équivalent à C.

Si C' n'est pas simple, en itérant ce procédé on obtient un CFG simple. □

Dans la suite, nous pourrons, d'après ce théorème, nous limiter à l'étude des CFG simples. On remarque toutefois que dans [26] il est montré que le nombre d'éboulements nécessaires pour atteindre la configuration finale dans un CFG convergent peut être exponentiel en le nombre de sommets. Un CFG simple équivalent à un CFG donné peut donc avoir un nombre exponentiel de sommets par rapport au CFG de départ. L'utilisation des CFG simples n'na pas pour d'être efficace d'un point de vue algorithmique, mais d'introduire un outil permettant d'écrire des preuves plus simples et naturelles.

Étant donné un CFG, on peut associer à chaque avalanche l'ensemble des sommets éboulés pendant cette séquence. Il est alors évident que si deux avalanches ont le même ensemble de sommets alors, partant de la même configuration σ, elles mènent toutes les deux à la même configuration σ'. Le résultat suivant montre que l'inverse est également vrai. Bien que ce résultat soit un corollaire direct du lemme 2.14, nous en donnons ici une preuve directe adaptée aux CFG simples.

Lemme 4.3 *Soit C un CFG simple. Si, partant de la même configuration, deux avalanches s et t mènent à la même configuration, alors les ensembles des sommets éboulés dans s et dans t sont les mêmes.*

Preuve : Soit C un CFG simple, de support $G = (V, E)$, et soient s et t deux avalanches menant d'une configuration σ à une configuration σ'. Soient X et Y les ensembles de sommets éboulés dans s et t respectivement. Supposons que $X \neq Y$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $X \setminus Y$ est non vide. L'avalanche s commence par une avalanche s_1 (éventuellement vide) de sommets de $X \cap Y$, suivie par une occurrence d'un sommet $x \in X \setminus Y$. Ceci signifie que, après l'éboulement de tous les sommets de s_1, x contient plus de grains que son degré sortant. Si l'on passe de σ à σ' en suivant l'avalanche t, tous les sommets de $X \cap Y$ sont éboulés pendant ce temps, et donc tous les sommets de s_1 sont éboulés. De ceci on conclut que, après l'éboulement de tous les sommets de Y, le sommet x est instable, ce qui signifie que x est instable dans la configuration σ'. Comme la configuration σ' peut être obtenue après l'éboulement de tous les sommets de X (y compris x), et puisque x est instable dans la configuration σ', nous en concluons que x peut redevenir instable une deuxième fois après avoir été éboulé. Ceci est impossible, car C est simple. Donc nous avons nécessairement $X = Y$. □

Ce résultat nous permet de définir le *shot-set* $s(\sigma)$ d'une configuration σ comme étant l'ensemble des sommets éboulés pour atteindre σ à partir de la configuration initiale. Nous dirons qu'un sous-ensemble X de l'ensemble des sommets d'un CFG est un shot-set *valide* s'il est le shot-set d'une configuration atteignable à partir de la configuration initiale. Autrement dit, un ensemble de sommets est un shot-set valide si l'on peut ordonner ses sommets en une avalanche valide à partir de la configuration initiale.

Les configurations d'un CFG et ses shot-sets sont donc naturellement en bijection. Le lemme suivant montre que cette bijection est en fait un isomorphisme de treillis. Ici aussi, bien que ce résultat soit un corollaire direct du théorème 2.15, nous en donnons une nouvelle preuve, plus adaptée au cas des CFG simples que la preuve initiale.

Lemme 4.4 *L'espace des configurations d'un CFG simple est isomorphe à l'ensemble de ses shot-sets, ordonné par inclusion.*

Preuve : Soit C un CFG simple et soient σ et σ' deux configurations. Nous allons montrer que $s(\sigma) \subseteq s(\sigma')$ si et seulement si $\sigma \leq \sigma'$. Si σ et σ' sont telles que σ' peut être atteinte à partir de σ par une avalanche utilisant les sommets $x_1, \ldots, x_n$, on a alors $s(\sigma') = s(\sigma) \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. D'autre part, si on a $s(\sigma) \subseteq s(\sigma')$, alors il existe une avalanche menant de σ à σ' : les sommets de $s(\sigma)$ peuvent être éboulés dans un certain ordre car $s(\sigma)$ est un shot-set valide, puis les sommets de $s(\sigma') \setminus s(\sigma)$ contiennent au moins autant de grains qu'auparavant, et peuvent donc être éboulés dans le même ordre que dans toute avalanche menant à σ' à partir de la configuration initiale. □

Ce résultat nous sera très utile dans la suite. Il est en effet beaucoup plus simple de travailler sur les shot-sets que sur les configurations elles-mêmes. Ceci peut se voir dans le théorème suivant, qui est un résultat déjà connu (thérorème 2.16, [12]) dont nous donnons une nouvelle preuve.

Théorème 4.5 *L'espace des configurations d'un CFG simple est un treillis* SLD.

Preuve : Nous rappelons que tout ensemble d'ensembles, ordonné par inclusion, fermé par union et ayant un unique plus petit élément est un treillis (théorème 1.26). Nous allons montrer que l'ensemble des shot-sets d'un CFG simple est fermé par union. Soient X et Y, $X \neq Y$ deux shot-sets valides d'un CFG simple C. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $X \setminus Y$ est non vide. Soient s et t deux avalanches valides comprenant tous les sommets respectivement de X et Y. Ces séquences ont un début commun, s_1, éventuellement vide. Après s_1, la séquence s se poursuit par un sommet $x \in X \setminus Y$. Nous affirmons que $Y \cup \{x\}$ est un shot-set valide de C : en effet, comme x n'est pas éboulé dans la séquence t, le nombre de grains qu'il contient ne diminue pas pendant cette séquence, et comme x est instable après la séquence s_1, il l'est encore après la séquence t complète. Donc $Y \cup \{x\}$ est un shot-set valide de C et nous pouvons continuer ce raisonnement pour montrer que $X \cup Y$ est un shot-set valide. Comme l'ensemble des shot-sets d'un CFG convergent a un unique élément minimal (l'ensemble vide, qui correspond à la configuration initiale) et qu'il est fermé par union, c'est donc un treillis.

Nous allons maintenant montrer que ce treillis est SLD : si, dans une configuration σ de shot-set s, il y a n sommets $x_1, \ldots, x_n$ instables, alors l'éboulement de l'un de ces sommets n'empêche pas l'éboulement des autres. De ceci, nous concluons que tout sous-ensemble de $s \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un shot-set valide. Le shot-set de la borne supérieure de toutes les couvertures supérieures de σ est $s \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. Donc l'intervalle entre σ et la borne supérieure de ses couvertures supérieures est un hypercube de dimension n, ce qui est la définition d'un treillis SLD. □

Comme tout CFG convergent est équivalent à un CFG simple, nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.6 *L'espace des configurations de tout CFG convergent est un treillis* SLD.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que le CFG est une généralisation de plusieurs autres modèles. Nous obtenons donc le corollaire suivant pour ces modèles, qui est une extension du corollaire 2.17 :

Corollaire 4.7 *Les ensembles $SPM(n)$, $L(n,m)$, $R_b(n)$, $L(n,\theta)$ et $CFG(n,m)$, ordonnés par la clôture réflexive et transitive de la relation prédécesseur, sont des treillis* SLD.

Remarquons que la bijection entre les configurations d'un CFG et les shot-sets est très utile. Elle permet non seulement de prouver que les espaces des configurations des CFG sont des treillis, mais également d'avoir une formule simple pour la borne supérieure. En effet, pour toutes configurations a et b d'un CFG, on a :

$$s(a \vee b) = s(a) \cup s(b).$$

Soit C un CFG de support $G = (V, E)$, et soit $L = L(C)$ son espace des configurations. On a donc deux moyens de caractériser L. Le premier, que nous venons de présenter, est de dire que L est isomorphe à l'ensemble des shot-sets des configurations, ordonné par inclusion. Le deuxième, que nous avons présenté dans la section 1.4 et qui est valable pour tous les treillis, et pour les treillis SLD en particulier, est de dire que L est isomorphe à l'ensemble des ensembles M_σ des inf-irréductibles plus petits que σ, ordonné par inclusion. Dans les deux cas, la borne supérieure de deux ensembles est leur union.

De plus, pour chaque arc (σ, σ') du treillis ($\sigma \prec \sigma'$), on sait, d'après la proposition 1.23 que $|M_\sigma \backslash M_{\sigma'}| = 1$, et qu'on peut donc associer à l'arc l'unique inf-irréductible m tel que

$M_\sigma \backslash M_{\sigma'} = \{m\}$. Dans le diagramme de Hasse du treillis, on peut étiqueter cet arc par m. D'autre part, pour le même arc (σ, σ'), on passe de la configuration σ à la configuration σ' par l'éboulement d'un sommet x. On peut donc également associer à cet arc le sommet x, et étiqueter par x cet arc dans le diagramme du treillis. On a donc un double étiquetage des arcs du treillis, l'un par les sommets du support du CFG, l'autre par les inf-irréductibles. La figure 4.2 en montre un exemple.

Ces deux étiquetages sont en fait équivalents :

Proposition 4.8 *Soit C un CFG simple de support $G = (V, E)$. La fonction suivante est une bijection entre les sommets de $V \setminus \perp$ et les inf-irréductibles de $L(C)$: $x \mapsto m$ si et seulement s'il existe un arc (σ, σ') dans L tel que $M_\sigma \backslash M_{\sigma'} = \{m\}$, et x est le sommet éboulé pour passer de σ à σ'.*

Preuve : L est un treillis SLD, donc sa hauteur est $|M|$. Nous avons vu que la hauteur de L est égale à $|V| - 1$. Ces deux ensembles ont donc bien le même cardinal. Supposons que cette bijection soit mal définie. Cela signifie qu'il existe deux arcs (σ_1, σ_2) et (σ'_1, σ'_2) dans $L(C)$ tels que soit ces deux arcs sont étiquetés par le même sommet et par des inf-irréductibles différents, soit ils sont étiquetés par le même inf-irréductible et par des sommets différents. Ces deux cas sont symétriques et peuvent se traiter de la même manière.

Nous allons montrer qu'on peut toujours se placer dans le cas où les deux arcs sont étiquetés par le même inf-irréductible m (resp. sommet x), et par deux sommets x et x' (resp. deux inf-irréductibles m et m') différents, et où on a $x \notin s(\sigma'_1)$, et $x' \notin s(\sigma_1)$ (resp. $m \notin M_{\sigma'_1} \setminus M_{\sigma'2}$, et $m' \notin M_{\sigma_1} \setminus M_{\sigma_2}$). Si x appartient à $s(\sigma'_1)$, alors cela signifie qu'il existe deux configurations $\theta_1 \prec \theta_2 < \sigma'_1$ tels que l'arc (θ_1, θ_2) est étiqueté par x. Comme x' n'appartient pas à $s(\sigma'_1)$, x' ne peut pas appartenir à $s(\theta_2)$, et donc l'arc (θ_1, θ_2) ne peut être étiqueté par x', et donc est étiqueté par un autre sommet x''. On se retrouve donc dans le cas où deux arcs sont étiquetés par le même inf-irréductible, mais pas par le même sommet. Le même raisonnement peut alors s'appliquer à nouveau pour finalement trouver des élément $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2$ et σ'_2 satisfaisant la condition ci-dessus.

On est donc dans le cas suivant : m appartient à $M \setminus M_{\sigma_1}$ et à $M \setminus M_{\sigma'_1}$, mais il n'appartient ni à $M \setminus M_{\sigma_2}$, ni à $M \setminus M_{\sigma'_2}$, et ni x ni x' n'appartiennent à $s(\sigma_1)$ ou $s(\sigma'_1)$. On a alors $M \setminus M_{\sigma_1 \vee \sigma'_1} = M \setminus M_{\sigma_1} \cup M \setminus M_{\sigma'_1}$, et $M \setminus M_{\sigma_2 \vee \sigma'_2} = M \setminus M_{\sigma_1} \cup M \setminus M_{\sigma'_1} \cup \{m\}$. Donc $\sigma_1 \vee \sigma'_1$ est couvert par $\sigma_2 \vee \sigma'_2$. On a, d'autre part $s(\sigma_1 \vee \sigma'_1) = s(\sigma_1) \cup s(\sigma'_1)$, et $s(\sigma_2 \vee \sigma'_2) = s(\sigma_1) \cup s(\sigma'_1) \cup \{x, x'\}$. Donc $\sigma_1 \vee \sigma'_1$ n'est pas couvert par $\sigma_2 \vee \sigma'_2$. On obtient donc une contradiction, ce qui montre que la bijection est bien fondée. □

Étant donnée une configuration σ, on peut donc parler de façon équivalente de son shot-set ou de l'ensemble $M \backslash M_\sigma$.

Remarquons que la notion de treillis SLD, quand elle est appliquée au langage représentant un CFG simple plutôt qu'à son espace des configurations, est strictement équivalente à la notion d'anti-matroïde. Un *anti-matroïde* est un langage simple (aucun mot ne contient deux fois la même lettre) tel que, si α et β sont deux mots du langage, alors α contient un sous-mot α' tel que $\beta\alpha'$ est un mot du langage, et les lettres de $\beta\alpha'$ sont exactement les

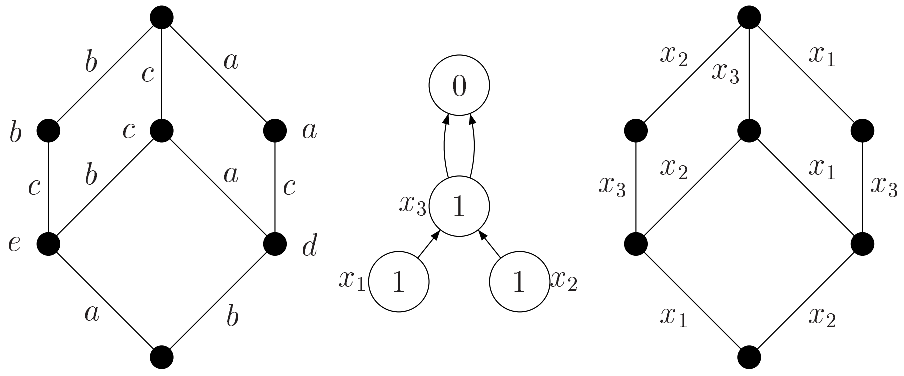


FIG. 4.2 – *À gauche, un treillis* SLD, *chaque arc étant étiqueté par l'inf-irréductible lui correspondant. Au milieu, un CFG dont l'espace des configurations est ce treillis. À droite, le même treillis, chaque arc étant étiqueté par le sommet du CFG lui correspondant.*

lettres qui apparaissent dans α et β.

On peut associer à tout anti-matroïde un unique treillis SLD qui est l'ensemble des ensembles de lettres des mots du langage, ordonné par inclusion. Réciproquement, on peut associer à tout treillis SLD un unique anti-matroïde dont les mots sont les suites des inf-irréductibles associés aux arcs du treillis, dans tous les chemins dans la relation de couverture du treillis, commençant à la configuration initiale.

Par exemple, l'anti-matroïde correspondant au treillis de la figure 4.2 (à gauche) est

$$L = \{a, b, ab, ba, ac, bc, abc, bac, acb, bca\}.$$

Les treillis SLD sont des treillis très fortement structurés et il existe de nombreuses façons de les représenter. Nous allons maintenant présenter quelques outils et résultats permettant de les décrire, et appliquer ces résultats aux treillis dont on sait qu'ils sont les espaces des configurations d'un CFG.

Définition 4.9 (Détente) *Soit x un sommet du support d'un CFG C. Une* détente *de x est un shot-set valide t de C tel que :*
- *$x \notin t$;*
- *$\{x\} \cup t$ est un shot-set valide de C ;*
- *il n'existe aucun sous-ensemble strict de t satisfaisant les deux conditions précédentes.*

Remarquons qu'une détente de x est le shot-set d'une configuration de C dans laquelle x est instable.

Les détentes d'un sommet x se reconnaissent facilement sur le diagramme de Hasse de l'espace des configurations lorsque chaque arc est indexé par le nom de sommet qui lui correspond. En effet, en partant de la configuration initiale, une détente correspond à une des plus petites configurations dans lesquelles x est instable. Par exemple, dans la figure 4.3, l'unique détente du sommet a est l'ensemble vide, l'unique détente du sommet d est $\{b\}$, et les détentes du sommet c sont $\{a\}$ et $\{b\}$.

Remarquons que cette notion, très naturelle pour un CFG, se traduit dans le langage des treillis par les relations flèches :

Proposition 4.10 *Soit C un CFG simple et soit $L = L(C)$ son espace des configurations. Soit x un sommet du support de C et soit m l'inf-irréductible qui lui correspond. Alors les détentes de x sont les éléments $j^-, j \updownarrow m$.*

Preuve : Nous avons vu plus haut qu'à chaque sommet du support correspond de façon unique un inf-irréductible de l'espace des configurations. Si une configuration σ d'un CFG C est une détente d'un sommet x, alors la configuration σ^x obtenue à partir de σ en éboulant x est nécessairement un sup-irréductible de l'espace des configurations de C. En effet, si ce n'est pas le cas, σ^x est la borne supérieure de k autres configurations $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ (définition 1.15). On a donc $s(\sigma^x) = \bigcup s(\sigma_i)$ et donc, comme $x \in s(\sigma^x)$, x appartient nécessairement à l'un des $s(\sigma_i)$. Ceci est en contradiction avec la définition d'une détente. Donc σ^x est un sup-irréductible. Soit m l'inf-irréductible correspondant à x. Nous allons montrer que $\sigma^x \updownarrow m$ (définition 1.24). D'après la bijection entre les sommets du support de C et les inf-irréductibles présentée ci-dessus (proposition 4.8), on a :

- $m \in M_\sigma$, ce qui signifie que $m \geq \sigma$;
- $m \notin M_{\sigma^x}$, ce qui signifie que $m \not\geq \sigma^x$;
- comme $M \setminus M_{\sigma^x} = M \setminus M_\sigma \cup \{m\}$ et que par définition de m^+, $M \setminus M_{m^+} = M \setminus M_m \cup \{m\}$, on en déduit que $M \setminus M_{\sigma^x} \subseteq M \setminus M_{m^+}$, ce qui signifie que $\sigma^x \leq m^+$.

Ces trois propriétés sont exactement la définition de $\sigma^x \updownarrow m$. □

Les détentes de l'espace des configurations d'un CFG sont un moyen de le représenter : si on connaît l'ensemble des sommets d'un CFG C et, pour chacun de ces sommets, l'ensemble de ses détentes, alors on peut reconstruire l'espace des configurations de C.

Proposition 4.11 *Soit C un CFG simple et soit $L = L(C)$. Soit $\{x_1, \ldots, x_n, \bot\}$ l'ensemble des sommets de C. Alors L est complètement déterminé par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et, pour tout i, l'ensemble des détentes de x_i.*

Preuve : Nous allons construire L à partir de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et des ensembles des détentes de chaque sommet x_i. Pour tout i, $i = 1, \ldots, n$, soit X_i l'ensemble des détentes de x_i. Nous affirmons que si un sous-ensemble Y de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est tel que, pour tout x_i, si x_i appartient à Y, alors l'une des détentes de x_i est incluse dans Y, alors Y est un shot-set valide de C.

En effet, soit Y un tel ensemble. Y peut être décomposé en une union d'ensembles $Y_1, \ldots, Y_k$ telle que chaque Y_j est l'union d'un singleton $\{x_i\}$ et d'une détente de x_i (remarquons que les ensembles $Y_1, \ldots, Y_k$ ne forment pas une partition de Y, puisqu'ils ne sont pas nécessairement disjoints). Donc, selon la définition d'une détente, chacun des ensembles Y_j est un shot-set valide de C. Puisque les shot-sets sont stables par union, Y est lui-même un shot-set valide de C.

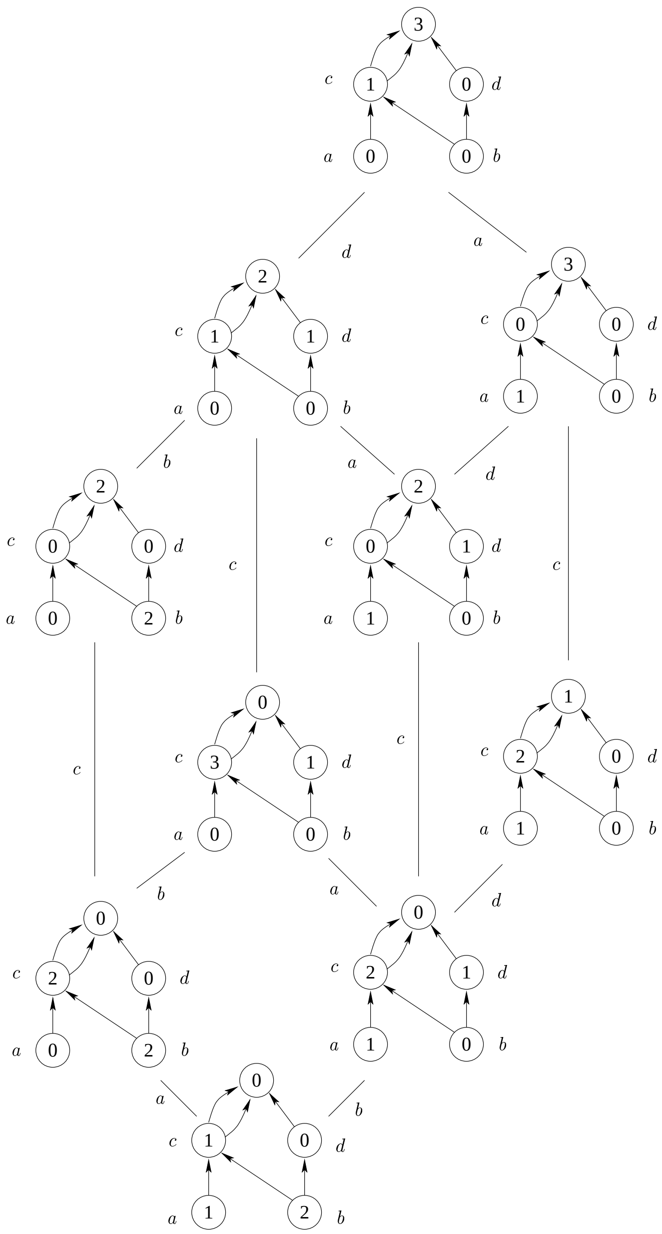


FIG. 4.3 – *Un espace des configurations d'un CFG simple.*

Réciproquement, tout shot-set de C satisfait la condition énoncée ci-dessus.

Donc, l'ensemble des sous-ensembles de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui vérifient cette condition est exactement l'ensemble des shot-sets de C, qui, ordonné par inclusion, est isomorphe à L (théorème 1.26). □

Nous avons présenté dans cette section les CFG simples, et nous avons montré que cette notion permet d'obtenir des preuves naturelles pour les espaces des configurations des CFG simples, et que ces notions peuvent être étendues aux CFG en général. Intéressons nous maintenant à l'ensemble des treillis qu'on peut obtenir de la sorte.

4.2 La classe des treillis obtenus par CFG

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la classe $L(CFG)$ des treillis qui sont des espaces des configurations de CFG. Nous allons montrer que cette classe contient les treillis distributifs, et est incluse strictement dans celle des treillis SLD, ce qui est un résultat surprenant car il n'existe pas en théorie des treillis de telle classe.

Commençons par constater que cette classe est stable pour les intervalles des treillis. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 4.12 *Soit L un treillis de $L(CFG)$. Alors tout intervalle de L est également dans $L(CFG)$.*

Preuve : Rappelons tout d'abord que tout intervalle d'un treillis est également un treillis. Soit L un treillis de $L(CFG)$ et C un CFG simple engendrant L. Le résultat est vrai pour tout intervalle $[\sigma, 1_L]$ de L : un CFG avec le même support que C et avec configuration initiale σ a le treillis $[a, 1_L]$ pour espace des configurations.

Ce résultat est également vrai pour tout intervalle $[0_L, \sigma']$ de L. En effet, comme C est simple, on peut partitionner l'ensemble des sommets de C en deux ensembles : $s(\sigma')$ et $V \backslash s(\sigma')$. L'intervalle $[0_L, \sigma']$ est alors l'espace des configurations du CFG obtenu à partir de C en supprimant tous les arcs sortants des sommet de $V \backslash s(\sigma')$ (de telle sorte qu'ils ne puissent plus jamais être éboulés), et avec la même configuration initiale que C.

Pour conclure, il suffit de remarquer que tout intervalle $[\sigma, \sigma']$ de L est l'intersection des intervalles $[0_L, \sigma']$ et $[\sigma, 1_L]$. □

Théorème 4.13 *Tout treillis distributif est un élément de $L(CFG)$.*

Preuve : Soit L un treillis distributif et soit $G = (J_L, <_L)$ le graphe de la relation de couverture de l'ordre induit sur les sup-irréductibles de L. Soit C le CFG de support $G_C = (V, E)$ et de configuration initiale σ, défini de la façon suivante : $V = J_L \cup \{\perp\}$, avec $\perp \notin J_L$, et pour chaque sommet x, les arcs sortants de x dans E sont les arcs sortants de x dans G, plus :

– $d^+_G(x) - {d_G}^-(x)$; arcs de x à $\perp$ si $d^+_G(x) > {d_G}^-(x)$

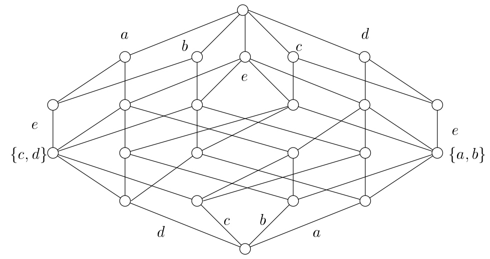


FIG. 4.4 – *Un treillis* SLD *qui n'est l'espace des configurations d'aucun CFG*

– un arc de x à $\perp$ si x est isolé dans G.

On constate que le degré entrant de chaque sommet de G_C est inférieur ou égal à son degré sortant.

La configuration initiale σ est : pour tout $x \in V, \sigma_x = d_G{}^{-}(x) - d_G^{+}(x)$. Nous allons montrer par induction que les shot-sets de C sont exactement les idéaux de J. L'ensemble vide est le shot-set de la configuration initiale. Soit I un idéal de J et supposons que I soit un shot-set valide de C. Soit σ la configuration telle que $s(\sigma) = I$. Les seuls sommets instables dans σ sont les sommets de $J \setminus I$ tels que tous leurs prédécesseurs sont dans I. En effet, quand tous les prédécesseurs d'un sommet j ont été éboulés, j a reçu $d^{+}(j)$ grains, il contient donc $\sigma_{0j} + d^{+}(j) = d^{-}(j)$ grains. Donc $I \cup \{j\}$ est un shot-set valide de C, et c'est également un idéal de J. D'autre part, aucun sommet qui n'appartient pas à I et dont tous les prédécesseurs ne sont pas dans I ne peut être éboulé, et aucun sommet de I ne peut être éboulé à nouveau. Donc l'espace des configurations de C est isomorphe au treillis des idéaux de J_L, qui d'après le théorème de Birkhoff (théorème 1.22) est isomorphe à L. $\square$

Ce théorème permet de voir la construction d'un treillis distributif à partir de l'ordre induit sur ses sup-irréductibles comme un modèle dynamique discret : chaque idéal est obtenu à partir de l'ensemble vide en ajoutant un par un des sup-irréductibles, à la condition que tous les prédécesseurs de l'élément qu'on veut ajouter soient déjà présents dans l'idéal.

Théorème 4.14 *Tous les treillis* SLD *ne sont pas espaces des configurations de CFG.*

Preuve : Nous allons montrer que le treillis L de la figure 4.4 n'est pas dans $L(CFG)$. Supposons que L soit l'espace des configurations d'un CFG C de support G. D'après le théorème 4.2, on peut supposer que C est simple. Comme L est de hauteur cinq, il y a donc cinq sommets distincts a, b, c, d et e qui sont éboulés pendant une avalanche maximale de C. Étudions les détentes de ces sommets : a, b, c et d sont instables dès la configuration initiale et e a pour détentes $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Cela signifie donc qu'il y a des arcs dans G de a, b, c et d vers e (voir figure 4.5). Soient n_a, n_b, n_c et n_d les nombres d'arcs respectivement de a, b, c et d vers e. Soit n le nombre de grains que doit recevoir e pour devenir instable. Comme $\{a, b\}$ est une détente de e, on a $n_a + n_b \geq n$. De même, $n_c + n_d \geq n$. On peut supposer sans perte de généralité que $n_a \geq n_b$ et $n_c \geq n_d$. Ceci implique que $n_a + n_c \geq n$, et donc e devient instable après l'éboulement de a et c. Or $\{a, c\}$ ne contient aucune détente

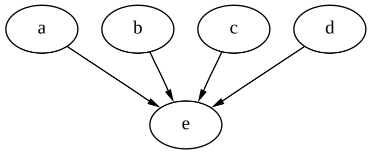


FIG. 4.5 – *Le support d'un CFG qui engendrerait le treillis de la figure 4.4.*

de e (la configuration dont le shot-set est $\{a, c\}$ n'a que deux successeurs immédiats, qui sont b et d), donc e ne peut pas être instable après l'éboulement de a et c. Nous obtenons donc une contradiction, et L ne peut pas être l'espace des configurations d'un CFG. $\square$

4.3 CFG colorés

Nous avons vu dans la section précédente que les treillis induits par CFG sont strictement inclus dans la classe des treillis SLD. Nous présentons maintenant une extension du modèle, le Chip Firing Game *coloré*, dont les espaces des configurations sont exactement la classe des treillis SLD.

Pour ce faire, nous présentons un théorème de représentation des treillis SLD qui est l'analogue du théorème de représentation de Birkhoff pour les treillis distributifs (théorème 1.22). Nous utilisons ensuite ce théorème pour montrer que tout treillis SLD peut être obtenu comme espace des configurations d'un CFG coloré. Cette approche permet de faire ressortir les similitudes entre les treillis distributifs et les treillis SLD.

4.3.1 Préliminaires

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble X de couleurs, nous appellerons *graphe coloré* le 4-uplet (V, E, X, χ), où χ est une fonction de E dans X. La *restriction* du graphe à une couleur c dans X est le graphe $(V, \chi^{-1}(c))$.

Un *CFG coloré* est défini sur un multigraphe coloré $G = (V, E, X, \chi)$. Une configuration est une fonction $\sigma : V \to \mathbb{N}^{|X|}$, associe à chaque sommet un nombre de grains de chaque couleur c de X. Étant donnés un sommet x et une couleur c, nous notons ${\sigma^c}_x$ le nombre de grains de couleur c dans x. La *restriction* d'un CFG coloré à une couleur $c \in X$ est le CFG au sens classique du terme C^c défini sur la restriction du support à c tel que, pour tout $x \in V$, x contient ${\sigma^c}_x$ grains dans la configuration initiale. La restriction d'un CFG à un ensemble de sommets est le CFG défini sur le graphe induit par cet ensemble, avec la restriction correspondante de la configuration initiale.

À chaque sommet d'un CFG coloré on associe également une fonction d'état : à tout moment, un sommet peut être soit *ouvert*, soit *fermé*. La règle d'évolution de ce modèle consiste à *ouvrir* les sommets. Un sommet fermé x peut être ouvert si : il existe une couleur $c \in X$ telle que x est instable (dans le sens habituel) dans la restriction du graphe à c (c'est-à-dire que x contient au moins autant de grains de couleur c que x a d'arcs sortants de la même couleur).

Ouvrir un sommet consiste à :

- le marquer comme ouvert ;
- pour chaque couleur c de X, considérer la restriction du graphe à c et à l'ensemble des sommets ouverts, et ébouler les sommets instables jusqu'à atteindre la configuration finale.

On remarque que pour que cette définition soit valide il faut s'assurer que les avalanches qui surviennent à l'ouverture d'un sommet sont finies. Nous considérerons donc uniquement des graphes pour lesquels, pour chaque couleur c, la restriction du graphe à c est un CFG (classique) convergent. On peut obtenir ceci par exemple en interdisant les composantes fermées dans le support (théorème 2.13).

Dans la configuration initiale, tous les sommets sont fermés. Comme seuls les sommets fermés peuvent être ouverts, les CFG colorés sont convergents : au bout d'un certain temps, aucun sommet ne peut plus être ouvert et la configuration finale est atteinte. Les CFG colorés sont également simples. Comme les CFG classiques sont convergents, si S est un ensemble de sommets ouverts dans un CFG coloré C, l'ordre dans lequel on ouvre les sommets de S n'influe pas sur la configuration obtenue. Les configurations sont donc caractérisées par leurs shot-sets, qui sont exactement l'ensemble des sommets ouverts. L'espace des configurations est ordonné par la relation suivante :

$$\sigma \leq \sigma' \iff s(\sigma) \subseteq s(\sigma').$$

Dans nos figures, nous représenterons toujours les sommets ouverts en gris. Les couleurs seront représentées par des nombres, la couleur d'un arc étant donnée par son étiquette. Dans un sommet, un nombre $N_{c_1,\ldots,c_k}$ signifiera qu'il y a N grains de chacune des couleurs $c_1, \ldots, c_k$ dans le sommet. Pour un exemple de l'espace des configurations d'un CFG coloré, voir la figure 4.8.

Le Chip Firing Game coloré est une extension du modèle du Chip Firing Game classique. En effet, nous avons le résultat suivant :

Remarque 4.15 *Tout CFG classique convergent est équivalent à un CFG coloré.*

Preuve : D'après le théorème 4.2, nous savons qu'un CFG convergent est équivalent à un CFG simple. Or, tout CFG simple peut être considéré comme un CFG coloré à une seule couleur, dans lequel on ouvre les sommets dans l'ordre où ils sont éboulés, et à chaque ouverture on n'éboule qu'un sommet. □

4.3.2 Treillis SLD et idéaux colorés

Si l'on considère l'ensemble des sup-irréductibles d'un treillis SLD, on peut définir naturellement une relation d'équivalence sur cet ensemble :

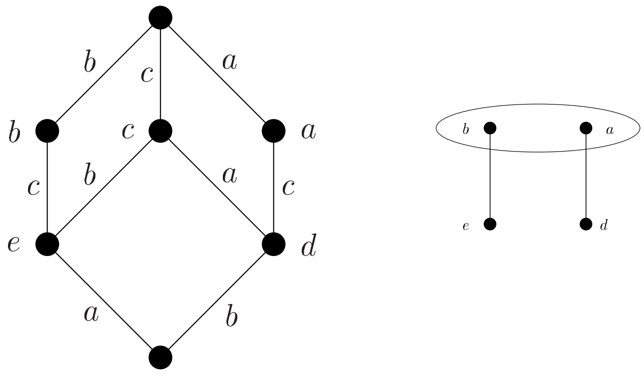


FIG. 4.6 – *Un treillis* SLD *et l'ordre induit sur les sup-irréductibles muni de la relation* $\sim$

Définition 4.16 (Relation $\sim$) *Soit L un treillis* SLD. *Nous rappelons (section 1.4) que l'ensemble J des sup-irréductibles de L est partitionné en $|M|$ ensembles $m_{\updownarrow} = \{j \in J, j \updownarrow m\}$. Nous définissons la relation $\sim$ par : $j \sim j'$ si et seulement si j et j' appartiennent au même ensemble $m_{\updownarrow}$.*

Remarquons que dans le cas où le treillis SLD considéré est l'espace des configurations d'un CFG C, cette définition se comprend intuitivement de la façon suivante : deux sup-irréductibles j et j' sont équivalents s'ils correspondent tous les deux à des détentes du même sommet du support de C (voir section 4.1).

La figure 4.6 montre un exemple de la relation $\sim$. Nous avons entouré dans cette figure les sup-irréductibles qui sont dans la même classe d'équivalence. On peut voir que les sup-irréductibles a et b sont bien équivalents, car les couvertures inférieures de a et b sont des détentes de c (c'est-à-dire des configurations où c est instable pour la première fois), ce qui, nous l'avons vu, signifie que $a \updownarrow c$ et $b \updownarrow c$.

La relation $\sim$ induit naturellement une relation d'équivalence sur les sous-ensembles de J : deux sous-ensembles X et Y de J sont équivalents si et seulement si tout élément de $X \backslash Y$ est équivalent à un élément de Y, et inversement. Nous considérons la restriction de cette relation aux idéaux de J. Pour chaque classe d'équivalence, nous prenons comme représentant l'idéal maximal de la classe (il est unique car l'union de deux idéaux est un idéal et, si deux idéaux sont dans une même classe, leur union est toujours dans cette même classe).

Nous avons alors le résultat suivant, qui est analogue au théorème de représentation de Birkhoff pour les treillis SLD :

Théorème 4.17 *Soit L un treillis* SLD. *L'ensemble des idéaux de J quotienté par $\sim$ et ordonné par inclusion est isomorphe à L.*

Preuve : Nous rappelons que L est isomorphe à l'ensemble $\{J_x, x \in L\}$ ordonné par inclusion. Soit $\mathcal{O}(J)$ l'ensemble des idéaux de J. Nous allons montrer que les représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{O}(J)$ sont exactement les ensembles J_x, pour tout $x \in L$.

Dans la suite, nous désignons l'ensemble $M\backslash M_x$ par $s(x)$ (d'après la caractérisation d'un treillis SLD par rapport à ses inf-irréductibles décrite dans la section 4.1). Soit $I \subseteq J$ le représentant d'une classe de $\mathcal{O}(\mathcal{J})/\sim$, et soit $x = \bigvee I$. Nous allons montrer que $I = J_x$. Comme x est par définition supérieur ou égal à tous les éléments de I, I est clairement un sous-ensemble de J_x. Supposons que $I \neq J_x$. Il existe alors $j \in J_x$ tel que $j \notin I$. Nous allons montrer qu'il existe $j' \in I, j \sim j'$. Soit m l'inf-irréductible tel que $j \updownarrow m$. Nous avons vu dans la section 4.1 que $j \updownarrow m$ implique que $j \not\leq m$, et donc $m \in s(j) = M \setminus M_j$. Comme $m \in s(j)$ et que $s(j) \subseteq s(x)$ (car $j \leq x$), on a $m \in s(x)$. Or, $s(x) = s(\bigvee I) = \bigcup\{s(j), j \in I\}$. Il existe donc un élément j'' de I tel que $m \in s(j'')$. Ceci implique que $j'' \not\leq m$. D'après le lemme 1.25, il existe donc j' tel que $j' \updownarrow m$ et $j' \leq j''$. Donc on a $j' \sim j$ (par définition de la relation $\sim$), et $j' \in I$ (car $j'' \in I$, $j' < j''$, et I est un idéal). Donc tout élément de $J_x \backslash I$ est équivalent à un élément de I. On en déduit que $I \sim J_x$. Comme I est l'idéal maximal de sa classe et que $I \sim J_x$ et $I \subseteq J_x$, on en déduit que $I = J_x$. Donc tout représentant de $\mathcal{O}(\mathcal{J})/\sim$ est un ensemble J_x, pour un certain $x \in L$.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $x \in L$, il existe une classe de $\mathcal{O}(\mathcal{J})/\sim$ dont J_x est le représentant. Soit $x \in L$, nous allons montrer que J_x est l'idéal maximal de sa classe, c'est-à-dire que $I \sim J_x$ implique $I \subseteq J_x$. Supposons que ce ne soit pas le cas, il existe alors un idéal I tel que $I \sim J_x$, $I \not\subseteq J_x$. Soit j un élément minimal de $I\backslash J_x$ ($J_x \cup \{j\}$ est alors un idéal de J). Nous allons montrer que $j \leq x$, et obtenir ainsi une contradiction. Comme $I \sim J_y$, il existe $j' \in J_x$, tel que $j \sim j'$. Comme $J_x \cup \{j\}$ est un idéal de J, tous les prédécesseurs stricts de j dans J appartiennent à J_x. Comme j^- est le seul prédécesseur immédiat de j (par définition d'un sup-irréductible), tout prédécesseur strict de j dans L est également un prédécesseur de j^-. On a donc $J_{j^-} = J_j \backslash \{j\}$. Or, d'après le choix de j tous les prédécesseurs de j appartiennent à J_x, donc $J_{j^-} \subseteq J_x$ (ce qui signifie $j^- \leq x$). Comme $j \sim j'$, il existe $m \in M$ tel que $j \updownarrow m$ et $j' \updownarrow m$. Nous avons vu que ceci implique que $s(j) = s(j^-) \cup \{m\}$ et que $m \in s(j')$. Donc $s(j) \subseteq s(j^-) \cup s(j') = s(j^- \vee j')$, donc $j \leq j^- \vee j'$. Nous savons déjà que $j^- \leq x$ et $j' \leq x$, donc $j \leq x$, ce qui est impossible car nous avons supposé que $j \notin J_x$.

Donc les représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{O}(\mathcal{J})/\sim$ sont exactement les ensembles J_x, donc L est isomorphe à l'ensemble des idéaux de J quotienté par la relation $\sim$.
□

Note 4.18 Ce théorème est très proche des travaux de Nourine sur les idéaux colorés [53]. Dans ses travaux, Nourine définit un ensemble ordonné coloré comme étant un ensemble partiellement ordonné dans lequel une couleur $c(x)$ est associée à chaque élément x, de telle sorte que $x < y$ implique $c(x) \neq c(y)$. Un idéal coloré est alors l'ensemble de couleurs associé à un idéal d'un ensemble ordonné coloré. Ceci donne lieu aux résultats suivants : l'ensemble des idéaux colorés d'un ensemble ordonné coloré est un treillis SLD et, étant donné un treillis SLD L, il existe un ensemble ordonné coloré tel que le treillis de ses idéaux coloré est L. Le théorème 4.17 est similaire à ce dernier résultat, si l'on prend l'ensemble ordonné coloré défini à partir de J, et où une couleur différente est associée à chaque classe d'équivalence de la relation $\sim$.

4.3.3 CFG colorés et treillis SLD

Dans cette section nous montrons que la classe des espaces des configurations des CFG colorés est exactement la classe des treillis SLD. Nous commençons par montrer que l'espace des configurations d'un CFG coloré est toujours un treillis SLD, puis nous montrons que tout treillis SLD est l'espace des configurations d'un CFG coloré particulier.

Théorème 4.19 *L'espace des configurations d'un CFG coloré est un treillis. De plus, ce treillis est* SLD*.*

Preuve : Soit C un CFG coloré. Nous allons montrer que l'ensemble des shot-sets des configurations atteignables de C est fermé par union. Soient σ_a et σ_b deux configurations atteignables de C, et soit σ_o une configuration maximale telle que σ_a et σ_b puissent être atteintes à partir de σ_o. Soit $A = s(\sigma_a), B = s(\sigma_b)$, et $O = s(\sigma_o)$. Nous avons forcément $O \subseteq A$ et $O \subseteq B$. Soient $a_1, \ldots, a_k \in A$ et $b_1, \ldots, b_l \in B$ les sommets de A et B qui sont susceptibles d'être ouverts dans la configuration σ_o. On peut supposer sans perte de généralité que $l \neq 0$. Nous avons $\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_n\} = \emptyset$ (sinon, il existerait un sommet $c \in A \cap B$ qui pourrait être ouvert dans σ_0, menant à une configuration σ_c, σ_a et σ_b pouvant être atteintes à partir de σ_c qui est plus grande que σ_o). Pour atteindre σ_a à partir de σ_o, il faut ouvrir tous les sommets de $A \backslash O$. Ceci ne change pas le fait que les sommets $\{b_1, \ldots, b_l\}$ sont susceptibles d'être ouverts (le nombre de grains de chaque couleur qu'ils contiennent reste le même ou augmente). Donc, la configuration $\sigma_{a'}$ telle que $s(\sigma_{a'}) = A \cup \{b_1, \ldots, b_l\}$ est atteignable à partir de σ_o et donc de la configuration initiale. De plus, si $A' = s(\sigma_{a'})$, alors $|(A \cup B) \backslash A'| = |(A \cup B) \backslash A| - l$. En itérant ce raisonnement, on obtient finalement une configuration de shot-set $A \cup B$.

L'ensemble des shot-sets des configurations atteignables a un unique plus petit élément (l'ensemble vide) et est fermé par union : c'est donc un treillis (théorème 1.26). Nous allons maintenant montrer que ce treillis est SLD : soit σ_x une configuration de C, $X = s(\sigma_x)$ et soient $x_1, \ldots, x_n$ les sommets susceptibles d'être ouverts dans σ_x. Clairement, pour tout sous-ensemble Y de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, l'ensemble $X \cup Y$ est un shot-set valide de C et l'intervalle entre X et $X \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un hypercube. Ce treillis est donc SLD. □

Étant donné un CFG coloré C, nous noterons également $L(C)$ son espace des configurations.

Le théorème suivant est donc naturellement l'analogue du théorème 4.13 de construction d'un CFG à partir d'un treillis distributif.

Théorème 4.20 *Soit L un treillis* SLD*. Alors il existe un CFG coloré C tel que $L = L(C)$.*

Preuve : Soit L un treillis SLD. Nous allons construire un CFG coloré C de support (V, E, X, χ) satisfaisant $L = L(C)$. Nous allons tout d'abord construire un CFG coloré $\tilde{C}$ tel que $L(\tilde{C})$ soit le treillis des idéaux de J. $\tilde{C}$ est défini de la façon suivante : le support de $\tilde{C}$ est $(J \cup \{\perp\}, \tilde{E}, X, \tilde{\chi})$. Nous définissons X tel que $|X| = |J|$. À chaque élément j de J nous associons de façon bijective une couleur c_j. On rappelle que J_j est l'ensemble

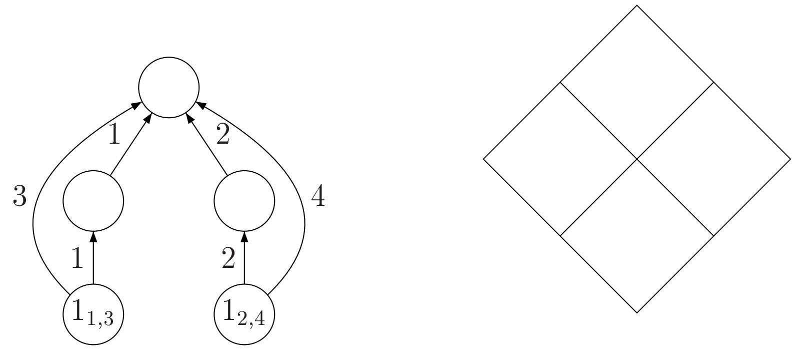


FIG. 4.7 – *Le CFG coloré $\tilde{C}$ obtenu à partir du treillis de la figure 4.2 et son espace des configurations*

des éléments de J inférieurs ou égaux à j. Alors, pour chaque $j \in J$, on construit avec la couleur c_j un CFG (classique) sur les sommets de J_j dont l'espace des configurations est le treillis des idéaux de J_j. Nous faisons ceci en appliquant l'algorithme décrit dans la preuve du théorème 4.13.

La figure 4.7 montre un exemple de la construction de $\tilde{C}$.

C est obtenu à partir de $\tilde{C}$ en faisant une contraction par rapport à la relation $\sim$: $V = J/\sim \cup \{\perp\} = M \cup \{\perp\}$, et pour chaque $x \in V$ et chaque couleur $c \in X$, on a (si $j_1, \ldots, j_k$ sont les sommets de la classe représentée par x) :

- $succ_c(x) = (\bigcup succ_c(j_i)) / \sim$;
- $pred_c(x) = (\bigcup pred_c(j_i)) / \sim$.

La configuration initiale est définie par : $\sigma^c{}_x = \sum \sigma^c{}_{j_i}$.

Nous allons maintenant montrer que $L(C)$ est isomorphe à l'ensemble des idéaux de J quotienté par la relation $\sim$. Comme le sommet $\perp$ est un puits, il ne peut jamais être éboulé, et donc tout shot-set de C est un sous-ensemble de M. À un shot-set s de C on associe l'idéal $I(s)$ de J qui est le plus grand idéal inclus dans $\bigcup\{m_{\updownarrow}, m \in s\}$ (remarquons que $I(s)$ est le représentant de sa classe). On remarque que, par construction, si $s \subseteq s'$, alors $I(s) \subseteq I(s')$.

Soient s et s', $s \neq s'$, deux shot-sets valides de C. Nous allons montrer que $I(s) \neq I(s')$. On peut supposer sans perte de généralité qu'il existe $m \in s \setminus s'$. D'après la construction de C, il existe $j \in m_{\updownarrow}$ tel que m a été ouvert pour la couleur c_j. Tous les sommets correspondant aux prédécesseurs de j ont donc été ouverts auparavant. On a donc $\downarrow j \subseteq \bigcup\{m_{\updownarrow}, m \in s\}$, ce qui implique $j \in I(s)$. Comme on a clairement $j' \notin I(s')$, alors $I(s) \neq I(s')$.

Réciproquement, si $I \in \mathcal{O}(\mathcal{J})/\sim$, nous allons montrer qu'il existe un shot-set valide s tel que $I = I(s)$ (remarquons que s est unique). Soit $M(I) = \{m \in M, \exists j \in I, j \in m_{\updownarrow}\}$. Nous allons montrer que $M(I)$ est un shot-set valide. Soit $j_i, \ldots, j_k$ une extension linéaire de I. Pour chaque i, on définit m_i comme étant l'inf-irréductible tel que $j_i \updownarrow m_i$. Nous allons montrer que, pour tout i, $s_i = M(\{j_1, \ldots, j_i\})$ est un shot-set valide de C. $s_1 = m_1$ est un shot-set valide, car j_1 est un élément minimal de J, donc m_1 est susceptible d'être ouvert pour la couleur c_{j_1}. Si $s_i = \bigcup_{l=1}^{i}[m_{j_l}]$ est un shot-set valide, alors $s_{i+1} = \bigcup_{l=1}^{i+1}[m_{j_l}]$, car tous les prédécesseurs de j_{i+1} sont ouverts dans s_i, et d'après la construction de C, m_{i+1} est susceptible d'être ouvert pour la couleur $c_{j_{i+1}}$ si tous les prédécesseurs de j_{i+1} sont ouverts. Donc $s_k = M(I)$, ce qui signifie que $I(s_k) = I$. De la même façon, si $I \subseteq I'$ sont deux éléments de $\mathcal{O}(\mathcal{J})/\sim$, toute extension linéaire de I est le début d'une extension linéaire de I', donc le shot-set s tel que $I(s) = I$ est inclus dans le shot-set s' tel que $I(s') = I'$.

Nous avons montré que les shot-sets valides de C sont en bijection avec les idéaux de J, quotientés par la relation $\sim$. D'après le théorème 4.19, l'espace des configurations de C est isomorphe à L. $\square$

La figure 4.8 montre un exemple de l'espace des configurations d'un CFG coloré obtenu par la méthode décrite dans la preuve.

4.4 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'étude du Chip Firing Game. Nous avons introduit les CFG simples, qui sont les CFG tels que chaque sommet du support est éboulé au plus une fois lors de toute avalanche maximale. Cette notion nous a permis de donner une preuve intuitive du fait que les espaces des configurations des CFG sont des treillis, et donc du fait que tous les modèles qui sont des cas particuliers du CFG engendrent également des treillis. De plus, nous avons montré que les espaces des configurations de tous ces modèles sont plus structurés que des treillis quelconques et que ce sont en fait des treillis SLD, très étudiés en théorie des treillis.

Nous avons ensuite tenté de caractériser la classe $L(CFG)$ des treillis qui sont des espaces des configurations de CFG. Nous avons montré que cette classe est strictement comprise entre deux classes très connues de treillis, les treillis distributifs (D) et supérieurement localement distributifs (SLD) :

$$D \subsetneq L(CFG) \subsetneq \text{SLD}.$$

Nous avons également présenté une extension du modèle, le CFG coloré, qui engendre plus de treillis que le CFG classique, et donc augmente le pouvoir d'expression du modèle.

Une caractérisation exacte de la classe des treillis engendrés par CFG reste à donner.

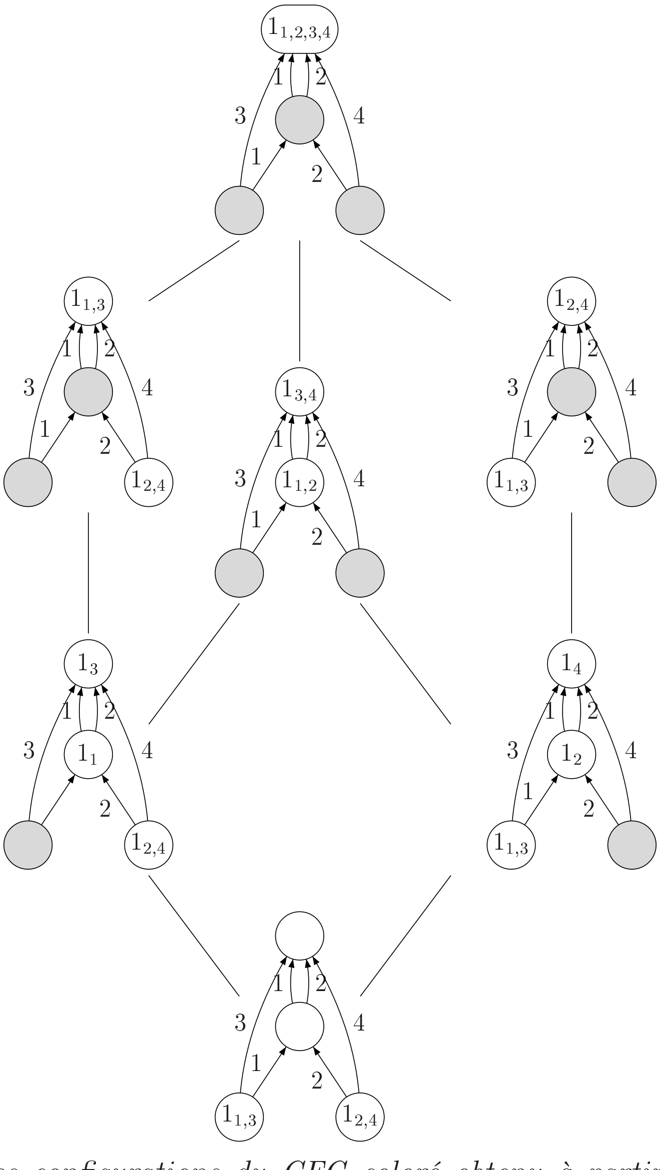


FIG. 4.8 – *L'espace des configurations du CFG coloré obtenu à partir du CFG $\tilde{C}$ de la figure 4.7*

Chapitre 5

Modèles similaires au CFG

Dans ce chapitre, nous allons étudier d'autres modèles proches du Chip Firing Game et comparer leurs pouvoirs d'expression en termes d'espaces des configurations.

Les techniques que nous utilisons pour étudier les espaces des configurations de ces modèles sont très proches de celles que nous avons utilisées au chapitre précédent, et beaucoup des résultats que nous allons présenter sont en fait des corollaires de résultats obtenus sur les CFG. Il est cependant intéressant de constater qu'il est possible de donner des preuves directes de ces résultats, conceptuellement différentes des preuves originales.

Dans la section 5.1, nous étudions l'Edge Firing Game et nous montrons que la classe des espaces des configurations de ce modèle est exactement la classe des treillis distributifs. Dans la section 5.2, nous étudions une généralisation du CFG, le Chip Firing Game sur un graphe en mutation. Nous montrons que le pouvoir d'expression de ces deux modèles est le même. Dans la section 5.3, nous étudions le modèle du tas de sable abélien (TSA) et nous montrons que la classe des treillis engendrés par TSA est une nouvelle classe de treillis comprise entre les treillis distributifs et SLD.

5.1 Edge Firing Game

Commençons par l'étude des Edge Firing Games (EFG) (définition 2.7). Il était déjà connu que l'espace des configurations de tout EFG est un treillis distributif (théorème 2.8). Nous allons montrer la réciproque de ce résultat : tout treillis distributif est l'espace des configurations d'un EFG. Nous obtiendrons de plus comme corollaire que tout EFG est équivalent en termes d'espaces des configurations à un EFG *simple*.

De la même façon que pour les CFG, on peut parler d'EFG *simple* : un EFG est simple si tout sommet est éboulé au plus une fois lors de toute avalanche.

Le résultat suivant est l'équivalent pour les EFG du lemme 4.3. Bien qu'il en soit un corollaire direct, nous en donnons une nouvelle preuve qui respecte la structure des EFG.

Lemme 5.1 *Soit E un EFG simple. Soient σ et σ' deux configurations de E telles que $\sigma \geq \sigma'$. Si s et s' sont deux avalanches qui transforment σ en σ', alors l'ensemble des sommets éboulés dans s est le même que dans s'.*

Preuve : Soient S et S' deux ensembles de sommets éboulés respectivement pendant les avalanches s et s'. Quand on passe de σ à σ' en suivant l'avalanche s, l'orientation des arcs du graphe change de la façon suivante : les arcs entre des sommets qui sont hors de S ne changent pas, les arcs incidents à un seul sommet de S sont retournés (ils étaient dirigés vers S dans σ, et sont sortants de S dans σ'), et les arcs entre deux sommets de S ont la même direction dans σ et σ' (ils sont retournés deux fois). De ceci, on peut facilement déduire que si S' n'est pas égal à S, alors l'avalanche s' ne peut pas mener à la même configuration que s, ce qui prouve le résultat annoncé. □

Remarquons que ce lemme reste vrai si l'on considère des EFG qui ne sont pas simples. Ceci peut être montré avec une preuve similaire à celle utilisée pour les Chip Firing Game (voir [12, 42]).

Grâce à ce lemme, on peut définir le shot-set de toute configuration σ d'un EFG de la même manière que pour les CFG : $s(\sigma)$ est l'ensemble des sommets éboulés pour atteindre σ à partir de la configuration initiale.

Le théorème 4.13, qui établit que tout treillis distributif est l'espace des configurations d'un CFG, peut être étendu aux EFG :

Théorème 5.2 *Tout treillis distributif est isomorphe à l'espace des configurations d'un Edge Firing Game simple.*

Preuve : Soit L un treillis distributif et J l'ensemble de ses sup-irréductibles muni de l'ordre induit par L. Soit $G_0 = (V, E)$ le graphe défini de la façon suivante : $V = J \cup \{\perp\}$ où $\perp \notin J$, et $E = \{(j, j') \mid j \prec j' \text{ dans } J\} \cup \{(j, \perp) \mid j \text{ est un élément minimal de } J\}$.

Nous allons montrer que l'espace des configurations de l'EFG de configuration initiale G_0 et de puits $\perp$ est isomorphe à L. Pour cela, nous allons d'abord montrer que cet EFG est simple, puis que son espace des configurations et le treillis des idéaux de J sont isomorphes, ce qui, d'après le théorème 1.22, donne le résultat.

On montre d'abord par induction que chaque sommet est éboulé au plus une fois lors de toute avalanche. Soit j un élément minimal de J. j est éboulé exactement une fois : j est instable dans G_0 car, par définition, tous les arcs incidents à j sont sortants. Une fois que j a été éboulé, l'arc $\{\perp, j\}$ est dirigé de j vers $\perp$, et comme $\perp$ ne peut pas être éboulé, cet arc ne sera jamais à nouveau sortant pour j, et donc j ne peut jamais être éboulé à nouveau.

Considérons maintenant un élément j de J couvrant un autre élément j' qui est éboulé exactement une fois. j ne peut être éboulé au plus qu'une fois car il ne peut être instable qu'après l'éboulement de j' (l'arc $\{j, j'\}$ doit être sortant de j). Après l'éboulement de j, l'arc $\{j, j'\}$ est dirigé vers j et, comme j' ne peut pas être éboulé à nouveau, cet arc ne sera jamais à nouveau sortant de j, et donc j ne sera jamais à nouveau instable. Ceci montre que l'EFG est simple et, d'après le lemme 5.1, on peut considérer son espace des configurations comme l'ensemble des shot-sets de ses configurations.

Maintenant, nous allons montrer que s, la fonction qui associe à chaque configuration son shot-set, est un isomorphisme de treillis entre l'espace des configurations de l'EFG et l'ensemble des idéaux de J. Nous allons montrer ceci par induction. L'ensemble vide est un idéal de J et c'est le shot-set de la configuration initiale. Soit I un idéal de J et supposons que I soit un shot-set valide. Nous allons montrer que les idéaux qui couvrent I sont des shot-sets valides. D'après la constatation faite dans la preuve du lemme 5.1, l'orientation du graphe après avoir éboulé tous les sommets de I a changé de la façon suivante : les arcs entre les sommets maximaux de I et leurs successeurs ont été retournés et sont dirigés vers les sommets maximaux de I. Les sommets instables sont donc exactement les sommets minimaux dans $J \setminus I$. Comme tout idéal qui couvre I est de la forme $I \cup \{j\}$, avec j minimal dans $J \setminus j$, on voit donc que les shot-sets des successeurs de σ sont exactement les idéaux qui couvrent I.

Nous avons montré que, pour toute configuration C, $s(C)$ est un idéal, et que les configurations qui sont les successeurs de C correspondent exactement aux idéaux qui couvrent $s(C)$. Donc, l'espace des configurations de l'EFG est isomorphe au treillis des idéaux de l'ordre induit sur J, qui par le théorème 1.22 est isomorphe à L. □

Un exemple de la preuve de ce théorème est donné dans la figure 5.1. Remarquons que, comme l'espace des configurations de tout EFG est un treillis distributif (théorème 2.8), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.3 *Tout EFG est équivalent à un EFG simple.*

Preuve : D'après le théorème 2.8, l'espace des configurations de tout EFG est un treillis distributif. Or, d'après le théorème 5.2, tout treillis distributif est l'espace des configurations d'un EFG simple. D'où la conclusion. □

On obtient donc finalement que les treillis distributifs, les EFG et les EFG simples sont tous équivalents en termes d'espaces des configurations. Remarquons également que la preuve est constructive, ce qui donne un moyen de transformer tout EFG en EFG simple.

Dans [58], ces travaux ont été étendus, et une caractérisation des EFG simples est donnée.

5.2 Chip Firing Game sur un graphe en mutation

Dans cette section, nous étudions les Chip Firing Game sur un graphe en mutation. Nous allons montrer que, bien que ce modèle soit une généralisation du CFG, les deux modèles ont le même pouvoir d'expression en termes d'espaces des configurations.

De la même façon que pour les CFG, on dira qu'un CFGM convergent est *simple* si aucun sommet n'est éboulé plus d'une fois lors d'une avalanche maximale.

À nouveau, on peut toujours se ramener à l'étude des CFGM simples :

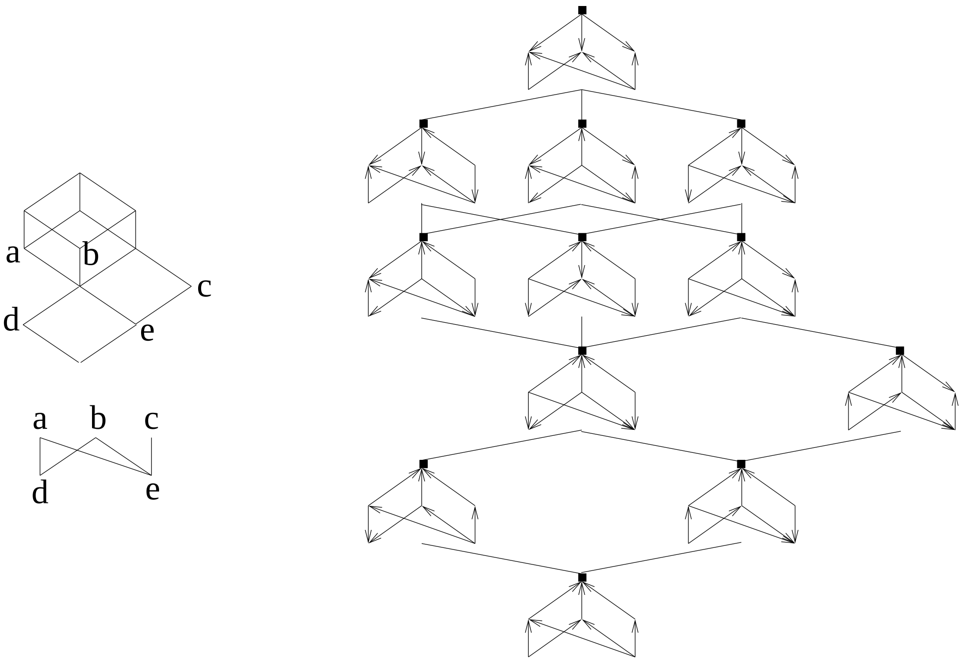


Fig. 5.1 – *À gauche, un treillis distributif et l'ordre induit sur ses sup-irréductibles. À droite, l'EFG obtenu d'après la preuve du théorème 5.2 à partir de ce treillis. Le puits de l'EFG est marqué par un carré noir.*

Théorème 5.4 *Tout CFGM est équivalent à un CFGM simple*

Preuve : La preuve de ce résultat est similaire à celle du théorème 4.2. Nous nous contentons donc ici de donner la construction du CFGM, sans rentrer dans les détails de la preuve.

Si un CFGM C n'est pas simple, alors il existe un sommet a qui est éboulé plus d'une fois lors d'une avalanche maximale. À partir de C, on construit le CFGM C' de la façon suivante : soit G le support initial de C. Si pour chaque sommet x, la séquence de mutation est $M_x = (S_x^1, S_x^2, S_x^3, \ldots)$, nous définissons S_x^0 comme étant l'ensemble d'arcs sortants de x dans G. À partir de maintenant, nous considérerons qu'un CFGM est défini par un ensemble de sommets, une configuration initiale et, pour chaque sommet x, une séquence infinie de multi-ensembles d'arcs $M_x = (S_x^0, S_x^1, S_x^2, \ldots)$. À tout instant pendant une avalanche maximale, si un sommet x dont la séquence de mutation est $(S_x^0, S_x^1, S_x^2, \ldots)$ a été éboulé i fois, alors les arcs sortants de x à cet instant sont ceux de S_x^i. Nous notons alors $l_i(x)$ le nombre de boucles de x (c'est-à-dire le nombre d'occurrences de x dans S_x^i), $d_i{}^>(x)$ le nombre d'arcs sortants de x qui ne sont pas des boucles (c'est-à-dire $d_i{}^>(x) = d_i{}^-(x) - l_i(x)$), et nous définissons $d_i{}^<(x)$ de manière duale : $d_i{}^<(x) = d_i^+(x) - l_i(x)$. Enfin, nous définissons N comme étant deux fois le nombre de grains présents dans la configuration initiale.

Nous définissons le CFGM C' de la façon suivante :

- l'ensemble des sommets de C' est $V' = V \backslash \{a\} \cup \{a_0, a_1\}$, avec $a_0 \notin V$ et $a_1 \notin V$;
- pour chaque $x \neq a \in V$ et pour chaque $i \in \mathbb{N}$, nous définissons S_x^i, le i^e ensemble de la séquence de mutation de x, de la manière suivante :

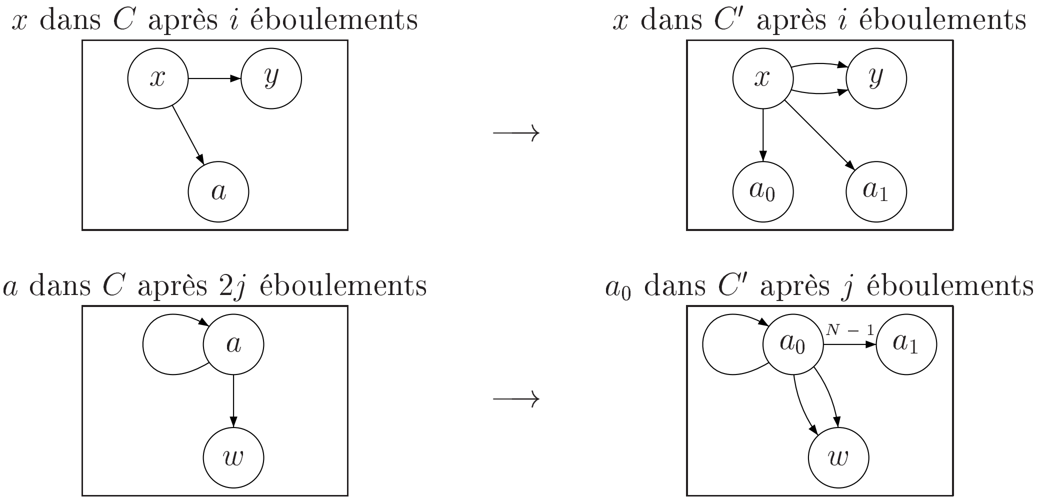


FIG. 5.2 – *Les arcs sortants des sommets du CFGM construit dans la simplification d'un CFGM.*

  - pour chaque occurrence d'un sommet $y \neq a$ dans S_x^i, on place deux occurrences de y dans S_x^i ;
  - pour chaque occurrence de a dans S_x^i, on place une occurrence de a_0 et une occurrence de a_1 dans S_x^i.
- pour chaque $i \in \mathbb{N}$, nous définissons les ensembles $S_{a_0}^i$ et $S_{a_1}^i$, les i^e ensembles dans les séquences de mutation de a_0 et a_1, de la manière suivante :
  - pour chaque occurrence d'un sommet $w \neq a$ dans S_a^{2i} (resp. S_a^{2i+1}), on place deux occurrences de w dans $S_{a_0}^i$ (resp. $S_{a_1}^i$) ;
  - pour chaque occurrence de a dans S_a^{2i} (resp. S_a^{2i+1}), on place une occurrence de a_0 dans $S_{a_0}^i$ (resp. une occurrence de a_1 dans $S_{a_1}^i$) ;
  - on place $N - {d_{2i}}^{>}(a)$ occurrences de a_1 dans $S_{a_0}^i$, et $N - {d_{2i+1}}^{>}(a)$ occurrences de a_0 dans $S_{a_1}^i$.
- pour tout sommet $x \neq a$, ${\sigma'}_x = 2\sigma_x$;
- ${\sigma'}_{a_0} = \sigma_a + N$;
- ${\sigma'}_{a_1} = \sigma_a$.

On montre avec les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 4.2 que C' est équivalent à C. Comme a_0 et a_1 sont éboulés strictement moins souvent dans C' que a dans C, on obtient en itérant ce procédé un CFGM simple. □

Un exemple de la construction du CFGM est donné dans la figure 5.2.

Nous avons vu dans la section 2.1 (théorème 2.18) que le CFGM est un modèle fortement convergent, ce qui implique que pour un CFGM simple on peut associer à chaque configuration σ l'ensemble des sommets éboulés pour atteindre σ à partir de la configuration initiale. Par analogie avec les CFG et les EFG, nous appellerons cet ensemble le shot-set $s(\sigma)$ de σ.

Nous allons maintenant montrer que tout CFGM est équivalent à un CFG :

Théorème 5.5 *Tout CFGM convergent est équivalent à un CFG.*

Preuve : Soit C un CFGM convergent. D'après le théorème 5.4 on peut supposer que C est simple. Soit $G = (V, E)$ et σ le support initial et la configuration initiale de C. Pour montrer notre résultat, nous allons utiliser C pour construire un CFG (simple) équivalent à C. Étant donné un sommet x, nous définissons le degré initial de x comme étant son degré dans G. Si x est éboulé (tous les sommets de C ne sont pas nécessairement éboulés lors d'une avalanche maximale), une mutation a lieu et son degré sortant change. Comme C est simple, x est éboulé au plus une fois lors d'une avalanche maximale donc son degré sortant change au plus une fois. Nous définissons le degré *final* de x comme étant son degré dans la configuration finale (dans le cas où x n'est pas éboulé lors d'une avalanche maximale, son degré initial et son degré final sont les mêmes).

Dans la configuration finale, x contient moins de grains que son degré sortant final (sinon x est instable et la configuration n'est pas finale). Deux cas sont alors possibles : soit x contient moins de grains que son degré sortant *initial*, soit x contient au moins autant de grains que son degré sortant initial. Dans le premier cas, si on supprime la mutation de x (les arcs sortants de x sont les mêmes avant et après la mutation), x n'est toujours pas instable dans la configuration finale. Si ceci est le cas pour tous les sommets, on peut supprimer toutes les mutations et obtenir un CFG classique simple équivalent à C.

Dans l'autre cas, il existe un sommet y qui contient dans la configuration finale au moins autant de grains que son degré sortant initial (ce qui signifie que son degré sortant a été augmenté lors de la mutation). Nous allons modifier C pour que ceci ne puisse pas se produire. Nous procédons de la façon suivante : soit $d^-(y)$ le degré sortant initial de y, ${\sigma^f}_y$ le nombre de grains dans y dans la configuration finale et n le nombre de grains nécessaires pour ébouler y (si $\sigma_y \geq d$, alors $n = 0$). Nous ajoutons ${\sigma^f}_y + 1 - d^-(y)$ arcs de y vers le puits et nous fixons la configuration initiale de y à ${\sigma^f}_y + 1 - n$ grains. La figure 5.3 montre un exemple de cette construction. Après cette modification, y a toujours besoin de recevoir n grains avant de devenir instable, donc les détentes de y ne sont pas modifiées, et y contient maintenant moins de grains dans la configuration finale que son degré sortant final. En faisant ceci pour tous les sommets qui ne satisfont pas cette propriété, on obtient un CFGM équivalent à C qui peut être considéré comme un CFG. □

Dans cette section, nous avons présenté un moyen de transformer tout Chip Firing Game sur un graphe en mutation en Chip Firing Game. Ceci montre que, bien que le CFGM soit une généralisation du CFG, le pouvoir d'expression de ces deux modèles en termes d'espaces des configurations est le même :

$$L(CFG) = L(CFGM).$$

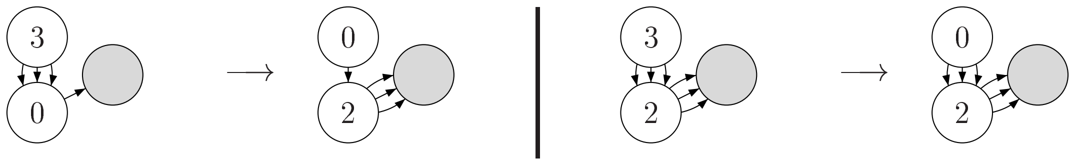


FIG. 5.3 – *Un exemple d'un CFGM simple transformé en CFG. À gauche, les configurations initiales et finales de ce CFGM. Remarquons que le sommet du bas contient dans la configuration finale plus de grains que son degré sortant initial. À droite, les configurations initiales et finales du CFG correspondant.*

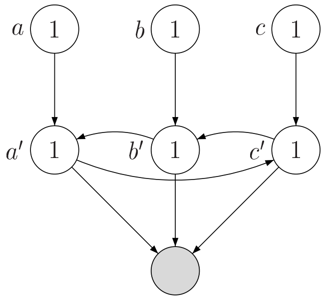


FIG. 5.4 – *Un CFG dont le support a un circuit.*

5.3 Modèle du tas de sable abélien

Dans cette section nous comparons les espaces des configurations engendrés par tas de sable abélien et Chip Firing Game. Nous avons déjà vu (section 2.2), que le TSA est (au niveau des espaces des configurations) un cas particulier du CFG. Nous nous posons ici la question inverse : étant donné un treillis qui est l'espace des configurations d'un CFG, à quelles conditions, sur le treillis ou sur le CFG, ce treillis est-il également l'espace des configurations d'un TSA. Nous allons montrer qu'une condition suffisante pour cela est que le support du CFG soit sans circuits et nous obtiendrons comme corollaire que tout treillis distributif est l'espace des configurations d'un TSA. Nous allons également montrer que cette condition n'est pas nécessaire et qu'il existe des CFG dont le support a un ou plusieurs circuits, qui sont tout de même équivalents à des TSA.

Nous considérons dans cette section qu'un CFG donné C est équivalent à un TSA si le support de C est tel que, pour tous sommets $x, y \neq \perp$, le nombre d'arcs de x vers y est égal au nombre d'arcs de y vers x.

Nous montrons tout d'abord que tous les TSA ne sont pas équivalents à des CFG. Ceci n'est pas surprenant, car le CFG est une généralisation du TSA.

Théorème 5.6 *Tous les treillis engendrés par CFG ne sont pas les espaces des configurations de TSA.*

Preuve : Nous allons montrer que le treillis L de la figure 5.5, qui est l'espace des configurations du CFG de la figure 5.4, ne peut être l'espace des configurations d'aucun TSA

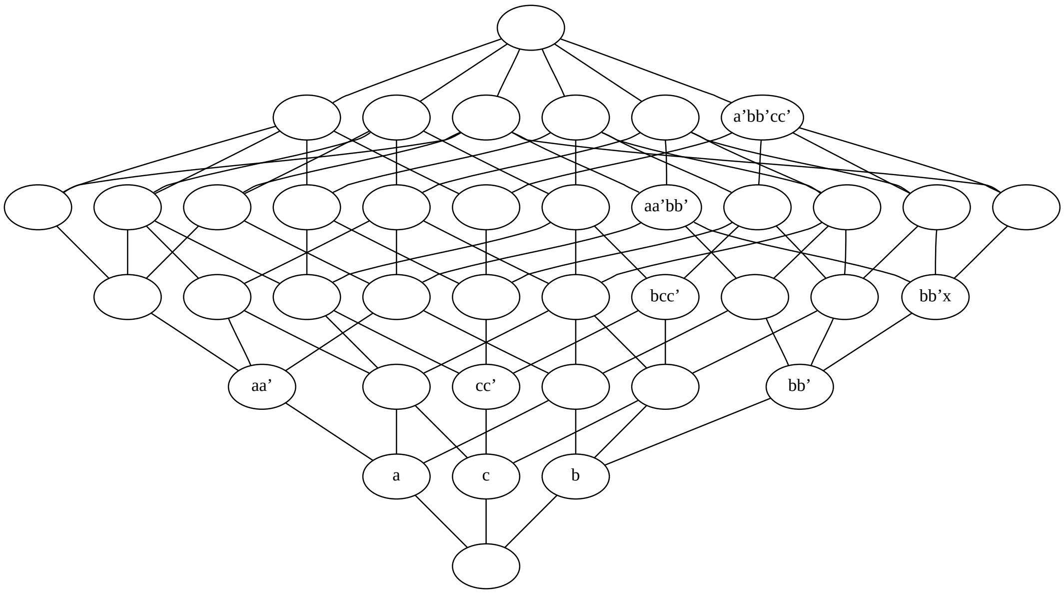


Fig. 5.5 – *L'espace des configurations du CFG de la figure 5.4 Ce treillis peut être obtenu par CFG mais pas par TSA.*

(c'est-à-dire d'aucun CFG tel qu'il existe un arc (y, x) pour chaque arc (x, y)). La preuve est en deux étapes : nous montrons d'abord que L ne peut être obtenu que par un CFG simple (c'est-à-dire qu'un CFG C tel que $L = L(C)$ *doit* avoir au moins six sommets différents, chacun étant éboulé une fois pendant une avalanche maximale) et donc que L ne peut être l'espace des configurations que d'un TSA simple. Ensuite, nous montrons des inégalités sur les nombres d'arcs entre certains sommets, à partir desquelles nous concluons qu'il existe deux sommets a et b tels que le nombre d'arcs (a, b) ne peut pas être le même que le nombre d'arcs (b, a). Donc on ne peut jamais considérer le support d'un CFG C tel que $L = L(C)$ comme non orienté Ceci prouve que L ne peut pas être obtenu par un TSA.

Montrons que L ne peut être obtenu que par un CFG simple : l'élément minimal de L a trois successeurs immédiats, il y a donc trois sommets différents qui sont instables dans la configuration initiale. Appelons les a, b et c. La configuration obtenue par l'éboulement de a (notée a) a trois successeurs immédiats, donc trois sommets différents sont instables dans cette configuration. Deux d'entre eux sont b et c, et le troisième, noté a' est donc soit un quatrième sommet (qui devient instable après l'éboulement de a), soit a lui même (qui peut alors être éboulé deux fois à la suite). Le même argument s'applique à b et c. Donc l'ensemble des sommets d'un CFG C tel que $L = L(C)$ est compris entre les deux ensembles de sommets de la figure 5.6.

Nous allons maintenant prouver que a', b' et c' sont différents de a, b et c, et qu'ils sont différents deux à deux. Montrons d'abord que a' et a sont différents : la configuration bb' a trois successeurs immédiats, donc il y a trois sommets distincts qui sont instables dans cette configuration. Deux d'entre eux sont a et c, donc le troisième (noté x, dont l'éboulement

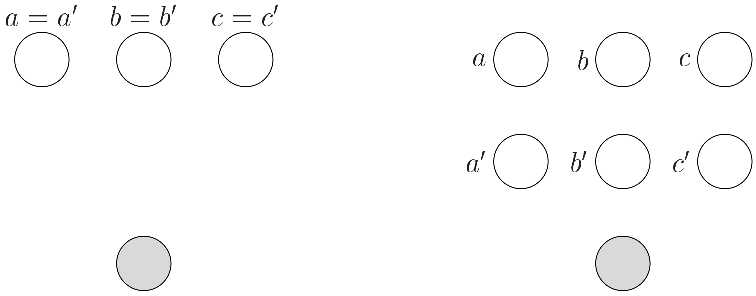


Fig. 5.6 – *Les ensembles de sommets possibles pour un CFG dont l'espace des configurations est le treillis de la figure 5.5*

mène à la configuration $bb'x$) est soit a' (auquel cas a' et a sont différents), soit c' (auquel cas c' et c sont différents). On observe que la borne supérieure de aa' et bb', notée $aa'bb'$ est plus grande que $bb'x$, ce qui signifie que $\{bb'x\} \subseteq \{aa'bb'\}$. Comme on a vu que x est différent de a, on en conclut que x est égal à a', et que a et a' sont distincts l'un de l'autre. Le même raisonnement est valable pour b' et c'.

Maintenant, nous allons montrer que a', b' et c' sont tous différents : si a' et b' sont confondus, alors la borne supérieure de aa' et bb' peut être atteinte à partir de aa' en éboulant b, et à partir de bb' en éboulant a. Donc, $aa'bb'$ serait à distance un de aa' et bb'. Or, ces configurations sont à distance deux. On obtient donc une contradiction, ce qui signifie que a' et b' sont différents l'un de l'autre. Avec le même argument, on peut montrer que a', b' et c' sont tous différents les uns des autres et, finalement que L ne peut être obtenu que par un CFG dans lequel six sommets différents sont éboulés lors d'une avalanche maximale.

Maintenant, nous allons montrer que L n'est l'espace des configurations d'aucun TSA. Soit n le nombre de grains que a' doit recevoir pour devenir instable. On sait que a' est instable après l'éboulement de b et b'. Donc $n \leq d(b, a') + d(b', a')$. Supposons que $d(c', a') \geq d(b', a')$. Alors on a $n \leq d(c', a') + d(b', a')$, et donc $n \leq d(c', a') + d(b', a') + d(c, a')$. Ceci signifie que a' est instable après les éboulements de c, c' et b'. Mais la configuration $b'cc'$ n'a que deux successeurs immédiats, ce qui signifie que seuls deux sommets sont instables dans cette configuration, et parmi ces sommets figurent nécessairement a et b', qui sont donc les seuls. On obtient donc une contradiction, on obtient $d(b', a') > d(c', a')$. De la même façon, on peut montrer que $d(c', b') > d(a', b')$ et $d(a', c') > d(b', c')$. Or, si L est l'espace des configurations d'un TSA, on doit avoir $d(a', b') = d(b', a')$, $d(a', c') = d(c', a')$ et $d(b', c') = d(c', b')$, ce qui est en contradiction avec les inégalités ci-dessus. On en conclut que L ne peut être l'espace des configurations d'aucun TSA. □

Nous allons maintenant étudier sous quelles conditions on peut obtenir à partir d'un CFG un CFG équivalent qui peut être considéré comme un TSA. Si C est un CFG simple et que C' est obtenu à partir de C en faisant des modifications au support et à la configuration initiale, alors C' est équivalent à C si :

– C' est simple (c'est-à-dire que les modifications ne permettent à aucun sommet d'être susceptible d'être éboulé plus d'une fois), et

– les détentes de chaque sommet restent les mêmes.

Nous présentons deux modifications fréquemment utilisées dans la suite :

Modification 1 : Ancrage
La modification d'ancrage appliquée avec un coefficient n à un sommet x d'un CFG consiste à ajouter n grains à la configuration initiale de x, et à ajouter n arcs de x vers le puits.

Modification 2 : Multiplication
La modification multiplicatrice consiste à multiplier par un coefficient entier n le degré entrant et la configuration initiale d'un sommet donné x, sans modifier le reste du CFG (si on ne considère pas les arcs vers le puits). Elle consiste à :

– multiplier par n la configuration initiale de x ;
– ajouter $(n-1)\cdot d^-(x)$ arcs de x vers le puits ;
– pour chaque prédécesseur immédiat y de x, ajouter $(n-1)\cdot d(y,x)$ arcs (y,x) et ajouter autant de grains à la configuration initiale de y.

Les deux lemmes suivants montrent que ces modifications ne changent pas l'espace des configurations du CFG auquel elles sont appliquées.

Lemme 5.7 *Le CFG obtenu en appliquant la modification d'ancrage à un CFG C est équivalent à C.*

Preuve : Soit x un sommet du support d'un CFG simple C et soit n le nombre de grains que x doit recevoir pour devenir instable. Ajouter un grain dans x et ajouter un arc sortant à x ne change pas ce nombre. □

Lemme 5.8 *Le CFG obtenu en appliquant la modification multiplicatrice à un CFG C est équivalent à C.*

Preuve : Soit C' le CFG obtenu à partir de C en appliquant la modification multiplicatrice à un sommet x avec coefficient n. $L(C')$ est isomorphe à $L(C)$ car :

– le degré sortant et la configuration initiale de x ont étés multipliés par n, donc x doit recevoir n fois plus de grains avant de devenir instable dans C' que dans C. Comme, pour chaque prédécesseur immediat y de x le nombre d'arcs de y vers x a également été multiplié par n, les détentes de x ne sont pas modifiées. Il reste à vérifier que x ne peut être éboulé qu'une seule fois dans C' (on note σ^0,σ'^0, et σ'^f les configurations initiales et finales dans C et C') :

$$\begin{aligned}\sigma'^f{}_x = \sigma'^0{}_x + \sum d'(y,x) &= n\sigma^0{}_x + n\sum d(y,x)\\ &< nd^-(x)\\ &< d'^-(x)\end{aligned}$$

– les modifications apportées à la configuration initiale des prédécesseurs de x, et les arcs ajoutés entre ces sommets et x sont similaires à l'application de la modification d'ancrage à ces sommets (avec x jouant le rôle du puits).

□

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant sur les CFG dont le support est sans circuits :

Théorème 5.9 *Soit C un CFG simple de support $G = (V, E)$ tel que G est sans circuits. Alors C est équivalent à un TSA.*

Preuve : Il est possible de transformer un CFG simple sans circuits en un TSA équivalent en temps linéaire par rapport à la taille de son espace des configurations. Nous allons construire à partir de C un CFG équivalent à C tel que, pour tous sommets $x, y \neq \perp$, le nombre d'arcs de x vers y soit égal au nombre d'arcs de y vers x. Cette construction se fait en trois étapes. Nous allons montrer que, à la fin de chaque étape, le CFG obtenu est équivalent à C.

Soit C un CFG simple de support $G = (V, E)$ et de configuration initiale σ_0, tel que G est sans circuits. On définit, pour chaque sommet x du support de C, $d_\perp(x)$ comme étant le nombre d'arcs de x vers le puits, et $d(x) = d^-(x) - d_\perp(x)$. Soit $L = (x_1, \ldots, x_n)$ une extension linéaire inverse de G (c'est-à-dire une liste de tous les sommets de G telle que tous les successeurs d'un sommet x apparaissent avant x).

Étape 1 : on calcule, pour chaque sommet x de V, la valeur $D[x] = \max_{\sigma \in L(C)}(d^-(x) - \sigma_x)$. Alors, pour i allant de 1 à n faire : si $D[x_i] \leq d(x_i)$, alors :

- appliquer la modification multiplicatrice à x_i avec coefficient $\lceil (d(x_i) + 1)/D[x_i] \rceil$;
- pour chaque arc (y, x_i) ajouté par la modification multiplicatrice, ajouter 1 à $D[y]$.

Dans cette étape, le graphe est modifié de telle façon que, pour chaque sommet x, le degré entrant de x dépasse d'un certain facteur le nombre d'arcs de x vers ses successeurs (le puits n'étant pas pris en compte). Ceci est possible car le graphe est sans circuits. Dans cette étape, la seule modification appliquée est la modification multiplicatrice. Donc, d'après le lemme 5.8, à chaque étape, le CFG obtenu est équivalent à C. À la fin de cette étape, on a, si l'on appelle C_1 le CFG obtenu, pour chaque sommet x et pour toute configuration σ de $L(C_1)$:

$$d^-(x) - \sigma_x > d(x).$$

Étape 2 : pour chaque $x \in V \setminus \{\perp\}$,

si ${\sigma^0}_x + d^+(x) + d(x) \geq 2d^-(x)$

alors appliquer la modification d'ancrage à x avec coefficient $\lceil (d(x) + d^+(x) + 1)/(2 \cdot d^-(x) - \sigma_{0x}) \rceil$.

La seule modification apportée dans cette étape est la modification d'ancrage, donc, d'après le lemme 5.7, à chaque étape, le CFG courant C_2 est équivalent à C. À la fin de cette étape on a, pour chaque sommet x :

$${\sigma^0}_x + d^+(x) + d(x) < 2d^-(x).$$

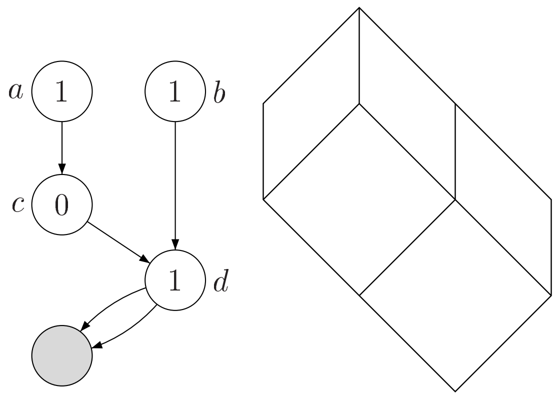


FIG. 5.7 – *Un CFG et son espace des configurations.*

Étape 3 : Pour chaque $x \in V \setminus \{\perp\}$ et pour chaque arc (y, x) de E :
- ajouter un grain à la configuration initiale de x ;
- ajouter un arc (x, y) à E.

Le CFG C_3 obtenu est équivalent à C car :
- un grain est ajouté à la configuration initiale de x pour chaque arc (x, y) ajouté. Ceci est similaire à l'application de la modification d'ancrage à x, avec y qui joue le rôle du puits ;
- C_3 est simple : après l'étape 2, on sait que ${\sigma^0}_y + d^+(y) + d(y) < 2d^-(y)$. Ceci signifie que, après que l'on ait ajouté $d(y, x)$ arcs de x vers y, on a encore ${\sigma^0}_y + d^+(y) < 2d^-(y)$, ce qui signifie que y n'est susceptible d'être éboulé qu'une fois dans le CFG qui en résulte ;
- les détentes des sommets ne sont pas modifiées : après l'étape 1, on a, pour toute configuration σ : $d^-(y) - \sigma_y > d(y)$. Donc, ajouter les arcs de x vers y ne modifie pas les détentes de y : il n'existe aucune configuration σ dans laquelle y est stable et pour laquelle l'ajout des arcs de x vers y rend y instable.

Nous avons montré que le CFG qu'on obtient par ces modifications est simple et que les détentes des sommets ne sont pas modifiées. Donc, d'après la proposition 4.11, le CFG qu'on obtient est équivalent à C. Comme le support de ce CFG peut être considéré comme non orienté, ce CFG peut être considéré comme un TSA. On en conclut que C est équivalent à un TSA. $\square$

Un exemple de cette construction est donné dans les figures 5.7, 5.8 et 5.9. La figure 5.7 présente un CFG. Les quantités $D[x]$ pour chaque sommet x sont : $D[a] = 1, D[b] = 1, D[c] = 1, D[d] = 2$. On prend, par exemple, comme extension linéaire inverse la liste $L = (d, c, b, a)$. Le CFG obtenu après l'étape 1 est présenté dans la figure 5.8. L'étape 2 ne modifie pas ce CFG. Le CFG final est présenté dans la figure 5.9. Ce CFG est équivalent à celui de la figure 5.7 et son support peut être considéré comme non orienté.

Le théorème 4.13 donne une méthode pour construire à partir de tout treillis distri-

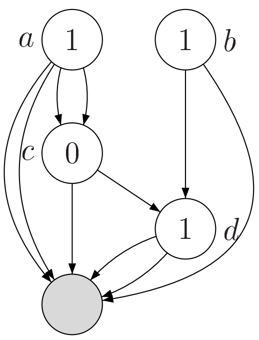


FIG. 5.8 – *Le CFG obtenu après l'étape 1 de la preuve du théorème 5.9. Le CFG obtenu après l'étape 2 est identique.*

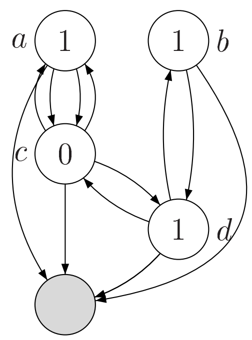


FIG. 5.9 – *Le CFG obtenu par la construction présentée dans la preuve du théorème 5.9. Ce CFG est équivalent à celui de la figure 5.7, et son support peut être considéré comme non orienté.*

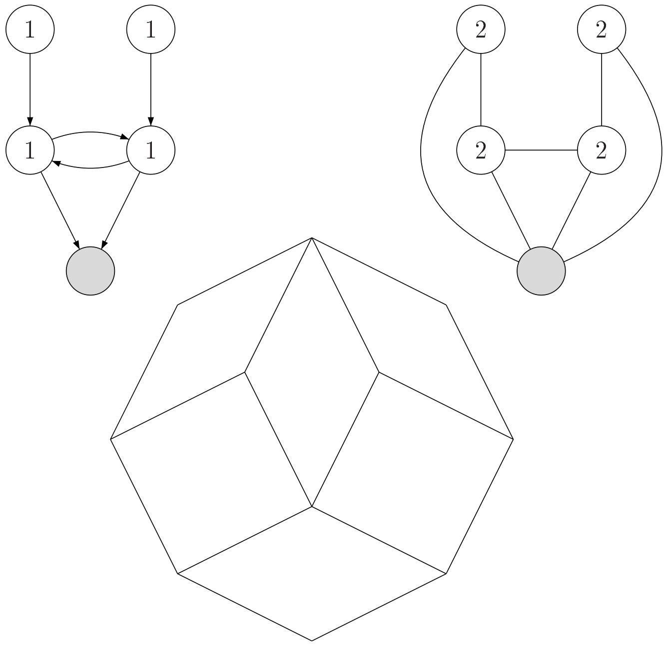


Fig. 5.10 – *Un CFG équivalent à un TSA, dont le support a un circuit. Nous présentons le CFG, un TSA équivalent, et leur espace des configurations*

butif L un CFG dont l'espace des configurations est L. Le CFG qu'on obtient par cette construction est simple et sans circuits. D'après le résultat précédent, il est donc équivalent à un TSA. On obtient ainsi le résultat suivant :

Corollaire 5.10 *Tout treillis distributif est l'espace des configurations d'un TSA.*

On remarquera cependant que les CFG sans circuits ne sont pas les seuls à être équivalents à des TSA. Nous donnons dans la figure 5.10 un exemple d'un CFG dont le support a un circuit, qui est tout de même équivalent à un TSA. Remarquons également que ce treillis n'est pas distributif, ce qui permet de voir que les treillis distributifs ne sont pas les seuls à être engendrés par TSA.

Nous avons comparé dans cette section les espaces des configurations engendrés par CFG et par TSA. Nous avons montré que la classe $L(TSA)$ des treillis engendrés par TSA est un sous-ensemble strict de la classe $L(CFG)$ des treillis engendrés par CFG, en donnant un exemple de treillis qui est dans $L(CFG)$ mais pas dans $L(TSA)$. Ceci n'est pas surprenant car le Chip Firing Game est une extension du modèle du tas de sable abélien. Puis nous avons montré que tout CFG dont le support est sans circuits est équivalent à un TSA. Ceci peut paraître être une forte restriction, mais permet tout de même de montrer que tous les treillis distributifs, et d'autres, peuvent être engendrés par TSA. Nous avons donc finalement montré les inclusions suivantes :

$$D \subsetneq L(TSA) \subsetneq L(CFG)$$

.

5.4 Conclusion

Nous avons établi dans le chapitre précédent que la classe $L(CFG)$ des treillis engendrés par CFG est strictement comprise (en termes d'inclusion) entre la classe des treillis distributifs et celle des treillis SLD. Nous avons tenté dans ce chapitre de préciser ce résultat, en comparant les classes de treillis engendrées par CFG avec celles engendrées par d'autres modèles proches, l'Edge Firing Game, le Chip Firing Game sur un graphe en mutation et le tas de sable abélien.

Nous avons constaté que les techniques utilisées dans le chapitre précédent pour le CFG s'appliquent aux modèles que nous avons étudiés dans ce chapitre. Nous avons montré que l'EFG engendre exactement la classe des treillis distributifs. Bien que le CFGM soit une généralisation du CFG, nous avons montré que ces deux modèles engendrent exactement les mêmes espaces des configurations. Enfin, nous avons montré que le TSA engendre une nouvelle classe de treillis strictement comprise entre les treillis distributifs et les treillis SLD. À notre connaissance il s'agit là de la première classe de ce type à être étudiée.

Conclusion de la deuxième partie

Nous nous sommes attachés dans cette partie à l'étude des espaces des configurations des CFG et de trois modèles proches : l'Edge Firing Game, le Chip Firing Game sur un graphe en mutation et le tas de sable abélien.

Nous avons pour cela introduit les CFG *simples*, qui sont les CFG tels que chaque sommet est éboulé au plus une fois lors d'une avalanche maximale. Nous avons montré que tout CFG convergent est équivalent à un CFG simple, ce qui rend beaucoup plus aisée l'étude de la structure des espaces des configurations de ces modèles. Nous avons également montré que cette notion peut s'appliquer aux autres modèles que nous avons considérés. Cette notion nous a donc permis d'unifier l'étude de tous ces modèles. Nous avons tout d'abord pu démontrer que leurs espaces des configurations sont des treillis SLD. Ceci permet de comprendre pourquoi la structure de treillis apparaît fréquemment dans l'étude des modèles dynamiques discrets.

La notion de CFG simple permet également d'obtenir des outils efficaces de représentation et de comparaison de tels treillis. Ceci nous a permis de comparer les classes de treillis $L(EFG)$, $L(TSA)$, $L(CFG)$ et $L(CFGM)$ engendrées respectivement par EFG, TSA, CFG et CFGM. Nous avons établi les inclusions suivantes :

$$D = L(EFG) \subsetneq L(TSA) \subsetneq L(CFG) = L(CFGM) \subsetneq SLD.$$

La figure 5.11 montre le diagramme d'inclusion des espaces des configurations de tous les modèles dont nous avons parlé depuis le début de ce mémoire. Cette figure synthétise les résultats obtenus et montre bien que l'étude de ces modèles du point de vue de la théorie des treillis est complexe.

Une première extension naturelle de ces travaux serait de donner une caractérisation exacte des différentes classes de treillis que nous avons rencontrées. En effet, après avoir établi les inclusions présentées ci-dessus, la seule façon que nous avons pour l'instant de les définir plus précisément est de donner des contre-exemples, c'est-à-dire des treillis n'appartenant pas à une classe donnée. Donner un algorithme répondant à la question de savoir si un treillis donné est l'espace des configurations d'un modèle particulier serait donc un complément intéressant aux travaux que nous avons effectués.

Nous avons vu que le CFG est un modèle généralisant une grande partie des modèles que nous avons présentés. Cependant, il existe des modèles, de nature très proche et dont les espaces des configurations sont également des treillis, qui ne sont pas des cas particuliers du CFG. Le principal de ces modèles est le modèle de Brylawski. Une autre suite naturelle

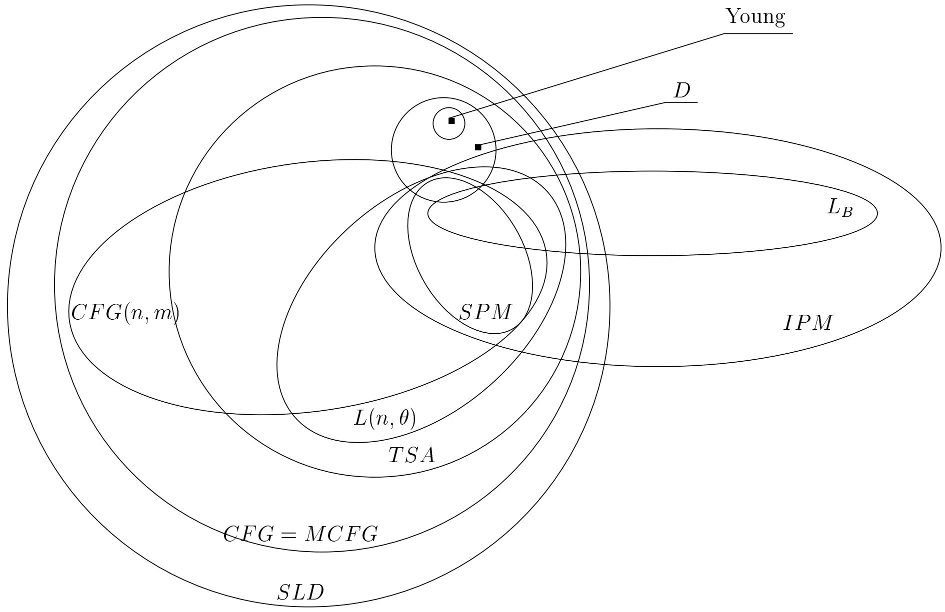


FIG. 5.11 – *Les classes de treillis engendrées par les modèles que nous avons présentés et leurs relations*

de ces travaux serait donc de définir un modèle qui généralise à la fois le CFG (et donc tous ses cas particuliers), et le modèle de Brylawski. L'étude de ses propriétés donnerait en effet des résultats applicables à l'ensemble des modèles que nous avons présentés, et permettrait en particulier de mieux comprendre l'apparition des treillis dans le contexte des modèles dynamiques discrets.

Troisième partie

Tas de sable abélien

Chapitre 6

Observations sur les tas de sable

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux configurations récurrentes du modèle du tas de sable abélien, et nous présentons quelques observations sur leur étude. Nous avons suivi principalement deux axes pour cette étude.

Dans la section 6.1, nous étudions l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe donné, et nous étudions différentes structures d'ordre qu'on peut associer à cet ensemble. Nous montrons qu'on peut naturellement partitionner cet ensemble en une union de treillis distributifs, ce qui montre que celui-ci est très fortement structuré. Dans la section 6.2, nous étudions une extension infinie d'un algorithme très connu du modèle : l'algorithme thermique, qui permet de calculer la configuration récurrente équivalente à une configuration quelconque donnée.

6.1 Structures d'ordre

Dans cette section nous étudions les structures d'ordre qu'on peut associer à l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe donné. Cet ensemble est naturellement ordonné en sup-demi-treillis. Nous comparons cet ordre avec celui défini dans [64] sur les arbres couvrants d'un graphe.

Nous montrons que l'ordre naturel sur les configurations récurrentes est naturellement partitionné en une union de treillis distributifs, et nous étudions la structure de ce partitionnement.

Considérons l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe $G = (V, E)$. Cet ensemble est naturellement ordonné par l'ordre composante à composante, défini par : $u \leq v$ si et seulement si, pour tout $x \in V$, $u_x \leq v_x$.

Théorème 6.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, l'ensemble des configurations récurrentes de G est naturellement ordonné en sup-demi-treillis.*

Preuve : Étant donnée une configuration récurrente u, toute configuration stable dans laquelle chaque sommet contient plus de grains (au sens large) que dans u est récurrente (proposition 3.5). Donc, si l'on considère deux configurations récurrentes u et u', la configuration m définie par : pour tout $x \in V$, $m_x = \max(u_x, u'_x)$ est récurrente. On vérifie que cette configuration est la borne supérieure $u \vee u'$ de u et de u' pour l'ordre composante à composante. L'ensemble des configurations récurrentes, ordonné composante à composante, est donc un sup-demi-treillis. □

La figure 6.3 montre le demi-treillis de l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe.

Le plus grand élément de ce demi-treillis est la plus grande configuration stable, c'est-à-dire celle dans laquelle chaque sommet contient exactement un grain de moins que son degré. Ce demi-treillis est rangé. Les éléments minimaux sont les configurations de niveau 0, c'est-à-dire celles qui contiennent $|E| - d(\perp)$ grains. Les couvertures supérieures (resp. inférieures) d'une configuration de niveau l sont toutes de niveau $l + 1$ (resp. $l - 1$). En effet, on passe d'une configuration à une autre dans la relation de couverture en ajoutant ou en retirant un grain, ce qui change le niveau de la configuration de un.

Dans [64], Michel Las Vergnas définit un ordre sur les arbres couvrants d'un graphe, appelé *ordre extérieur*. Cet ordre est également un demi-treillis, et il est rangé : tous les arbres d'activité externe a donnée sont au même niveau de l'ordre.

On rappelle que pour un arbre couvrant A d'un graphe connexe, $Ext(A)$ est l'ensemble des arêtes externes actives de A (voir section 1.1).

Définition 6.2 *Soit G un graphe connexe. On définit l'*ordre externe *$\leq_{Ext}$ sur les arbres couvrants de G de la façon suivante : $A \leq_{Ext} B \iff A \subseteq B \cup Ext(B)$.*

L'ordre externe des arbres couvrants du graphe de la figure 6.1 est présenté dans la figure 6.2.

Il est démontré dans [64] que cet ordre est rangé, tous les arbres couvrants d'activité externe i étant au même niveau, et que c'est un sup-demi-treillis.

On associe à chaque arbre couvrant de G le mot constitué des étiquettes des arêtes qui le constituent, classées par ordre croissant. Étant donné un sous-ensemble A des arêtes d'un graphe G, on note $MaxAr(A)$ l'arbre couvrant contenu dans A dont le mot associé est le plus grand pour l'ordre lexicographique. La borne supérieure de deux arbres couvrants A_1 et A_2 est alors donnée par :

$$A_1 \vee_{Ext} A_2 = MaxAr((A_1 \cup Ext(A_1)) \cup (A_2 \cup Ext(A_2)))$$

Nous avons présenté dans le chapitre 3 une bijection entre les configurations et les arbres couvrants d'un graphe respectant l'activité externe. Nous nous sommes donc posé la question de savoir si cette bijection est un isomorphisme d'ordre entre l'ordre composante à composante sur les configurations récurrentes, et l'ordre extérieur sur les arbres couvrants.

Pour l'exemple que nous avons présenté (figures 6.2 et 6.3) on voit facilement que ce n'est pas le cas. Observons pour cela le nombre d'arcs entre le deuxième et le troisième

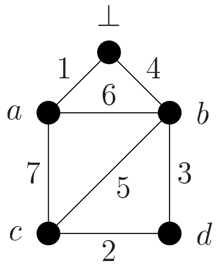


FIG. 6.1 – *Un graphe non orienté, le puits est noté* $\perp$.

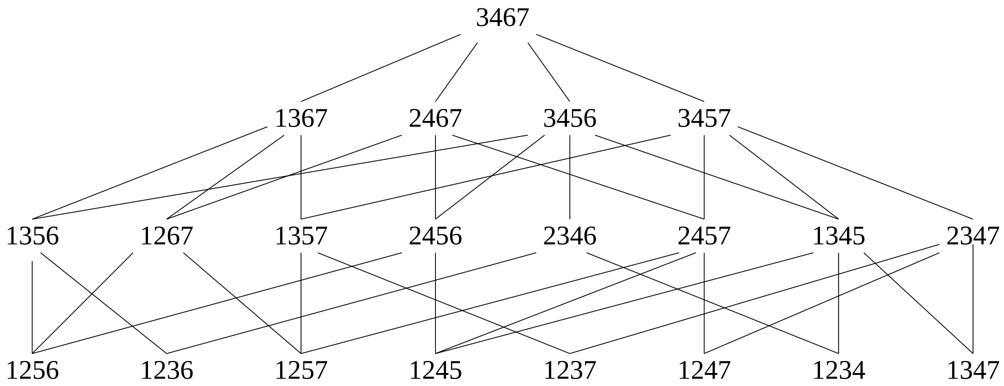


FIG. 6.2 – *L'ordre externe sur les arbres couvrants du graphe de la figure 6.1.*

niveau. Dans l'ordre extérieur sur les arbres couvrants (figure 6.2), les huit éléments du troisième niveau sont répartis comme suit :

- six sont couverts par deux éléments du deuxième niveau ;
- deux ont une unique couverture supérieure.

Dans l'ordre composante à composante sur les configurations récurrentes du même graphe (figure 6.3), ces nombres ne sont pas les mêmes :

- quatre éléments du troisième niveau sont couverts par exactement deux éléments du deuxième niveau ;
- quatre ont une unique couverture supérieure.

Ceci montre bien que ces ordres ne sont pas les mêmes.

Cependant les ordres que nous avons présentés ne sont pas les seuls définis sur le graphe de la figure 6.1. En effet, l'ordre extérieur sur les arbres couvrants dépend a priori de la numérotation des arêtes du graphe (on sait cependant que quelle que soit la numérotation des arêtes, le nombre d'éléments par niveau reste constant (théorème 1.2)). L'ordre composante à composante dépend a priori, lui, du choix du sommet qui joue le rôle du puits dans le graphe. Il existe donc au maximum 7! ordres extérieurs sur les arbres couvrants différents, et cinq ordres sur les configurations récurrentes différents.

Nous avons cependant constaté que, dans le cas général, on ne peut pas choisir une numérotation des arêtes et un puits tels que ces deux ordres soient isomorphes.

6.1.1 Fonctions de hauteur

Nous allons maintenant étudier plus en détail la structure de l'ordre composante à composante des configurations récurrentes d'un graphe donné. Soit u une configuration récurrente sur un graphe G à $n+1$ sommets (le sommet de numéro $n+1$ est le puits). On associe à u un vecteur $h = (h_1, \dots, h_n)$ de $\mathbb{N}^n$ de la façon suivante. On définit la suite de configurations $u^{(i)}$ comme :

- $u^{(1)} = u + \beta$, c'est à dire que $u^{(1)}$ est obtenue en éboulant le puits à partir de u ;
- $u^{(k+1)}$ est obtenue à partir de $u^{(k)}$ en éboulant tous les sommets instables.

Pour chaque sommet i de G, si i est instable dans la configuration $u^{(k)}$, alors on fixe $h_i = k$; noter que le nombre k ainsi déterminé est unique.

On appelle h la *fonction de hauteur* de u.

On remarque que la fonction de hauteur d'une configuration récurrente est en rapport étroit avec l'arbre couvrant obtenu par la bijection donnée dans la section 3.1.2. En effet, pour chaque sommet, la fonction de hauteur de ce sommet n'est rien d'autre que la distance de ce sommet au puits dans l'arbre couvrant correspondant à la configuration.

La figure 6.4 montre la fonction de hauteur associée à la configuration identité sur la grille 300×300. La hauteur des cases est représentée par un dégradé de gris, représentant la hauteur modulo 20.

À chaque configuration récurrente correspond une unique fonction de hauteur. En revanche, plusieurs configurations récurrentes peuvent correspondre à la même fonction de hauteur. On dira qu'un vecteur $h = (h_1, \dots, h_n)$ est une fonction de hauteur *valide* s'il existe une configuration récurrente dont la fonction de hauteur est h. Nous allons étudier la structure des ensembles de configurations récurrentes qui ont la même fonction de hauteur.

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et h une fonction de hauteur valide de G. On définit l'ensemble $h(k) \subseteq V$ comme étant les sommets de hauteur k pour h. Soit u une configuration récurrente de fonction de hauteur h. Tout sommet x de $h(1)$ est stable dans u, et devient instable quand on éboule le puits. Donc tout sommet x de $h(1)$ contient entre $d(x) - d(x, \perp)$ et $d(x) - 1$ grains dans u. De plus, tout autre sommet y voisin du puits contient dans u strictement moins de $d(y) - d(y, \perp)$ grains. Considérons maintenant les sommets de $h(2)$. Ces sommets sont stables dans u, et deviennent instables quand on éboule les sommets de $h(1)$. Mais aucun sommet de $h(2)$ ne devient instable lorsqu'on éboule le puits. Donc chaque sommet x de $h(2)$ contient entre $d(x) - \sum_{y \in h(1) \cup \{\perp\}} d(y, x)$ et $d(x) - 1 - d(x, \perp)$ grains. Ce raisonnement est valable pour tout k : chaque sommet x de cet ensemble contient entre $d(x) - \sum_{i<k, y \in h(i)} d(y, x)$ et $d(x) - 1 - \sum_{i<k-1, y \in h(i)} d(y, x)$ grains.

Ces valeurs caractérisent complètement l'ensemble des configurations récurrentes de fonction de hauteur h : si l'on choisit pour chaque sommet du graphe un nombre de grains respectant les contraintes énoncées ci-dessus, alors la configuration obtenue est récurrente et sa fonction de hauteur est h. L'ensemble des configurations de fonction de hauteur h, a donc un unique élément minimal $h^{\min}$ et un unique élément maximal $h^{\max}$ pour l'ordre

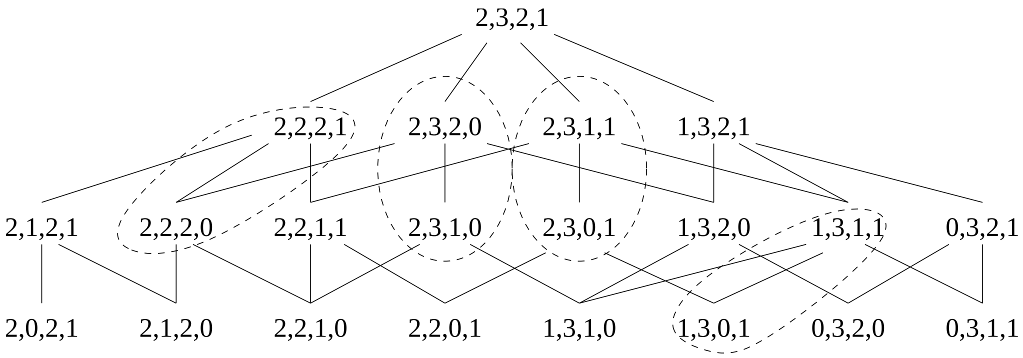


FIG. 6.3 – *Les configurations récurrentes du graphe de la figure 6.1, ordonnées composante à composante. Les configurations entourées sont celles qui ont la même fonction de hauteur.*

composante à composante, définis par : pour tout k et pour tout sommet x dans $h(k)$,

$$h_x^{\min} = d(x) - \sum_{i<k, y\in h(i)} d(y,x),$$

$$h_x^{\max} = d(x) - 1 - \sum_{i<k-1, y\in h(i)} d(y,x)$$

Ceci nous amène au résultat suivant :

Théorème 6.3 *Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe, et h une fonction de hauteur valide de G. L'ensemble des configurations récurrentes de G qui ont comme fonction de hauteur h, ordonné par l'ordre composante à composante, est un treillis distributif. Si u et u' sont deux configurations de cet ensemble, leurs bornes supérieure et inférieure sont données par :*
- *pour tout $x \in V \setminus \{\perp\}$, $(u \vee u')_x = \max(u_x, u'_x)$*
- *pour tout $x \in V \setminus \{\perp\}$, $(u \wedge u')_x = \min(u_x, u'_x)$*

Preuve : Il suffit de constater que les configurations $u \vee u'$ et $u \wedge u'$ définies comme ci-dessus ont comme fonction de hauteur h. □

La relation de couverture dans ces treillis distributifs est la même que la relation de couverture de l'ordre composante à composante des configurations récurrentes. Ceci signifie que la partition des configurations récurrentes en treillis distributif respecte cet ordre. Si deux configurations récurrentes sont dans le même treillis, alors toutes les configurations récurrentes qui sont dans l'intervalle compris entre ces deux configurations sont également dans ce même treillis. On constate en particulier que toutes les configurations minimales pour l'ordre composante à composante sont les éléments minimaux d'un des treillis distributifs, et qu'elles ont donc toutes des fonctions de hauteur différentes. De même, la configuration maximale est l'élément maximal d'un de ces treillis. La figure 6.3 montre l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe partitionné en treillis distributifs. Dans cette figure, les configurations qui ont les mêmes fonctions de hauteur sont encerclées.

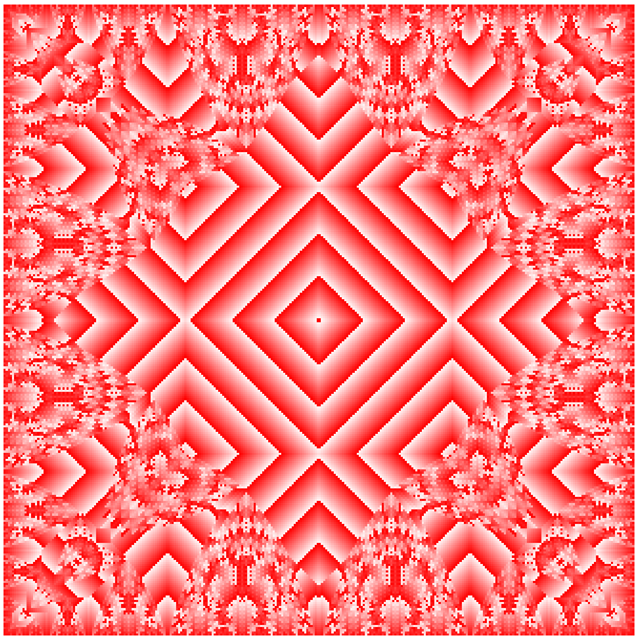


FIG. 6.4 – *La fonction de hauteur de l'identité sur la grille* 300×300

Étudions maintenant la relation $\leq$ induite sur les fonctions de hauteur par l'ordre sur l'ensemble des configurations récurrentes. Une fonction de hauteur f_1 est inférieure ou égale à une fonction de hauteur f_2 si et seulement si il existe deux configurations récurrentes u_1 et u_2, de fonction de hauteur f_1 et f_2, telles que $u_1 \leq u_2$ pour l'ordre composante à composante. Nous allons voir que ceci définit bien un ordre.

La figure 6.5 montre l'ordre sur les configurations récurrentes présenté dans la figure 6.3 quotienté par les fonctions de hauteur.

On constate que la relation $\leq$ sur les fonctions de hauteur est un sous-ordre du dual de l'ordre composante à composante sur les fonctions de hauteur. En effet, on se convainc facilement que si u et u' sont deux configurations récurrentes de fonctions de hauteur h et h', alors $u \leq u'$ implique $h' \leq h$. En effet, la configuration $u' + \beta$ obtenue en éboulant le puits à partir de u' est supérieure ou égale à la configuration $u + \beta$, et donc, lors de la relaxation de $u' + \beta$ les sommets ne peuvent pas s'ébouler plus tard que lors de la relaxation de $u + \beta$.

Il semble sur l'exemple que nous avons présenté que l'ordre sur les fonctions de hauteur induit par celui sur les configurations récurrentes soit exactement le dual de l'ordre composante à composante. Ceci n'est cependant pas le cas en général. La figure 6.6 montre un exemple d'un graphe pour lequel l'ordre induit sur les fonctions de hauteur n'est pas le dual de l'ordre composante à composante : les configurations $u = 1, 2, 1, 1$, et $v = 1, 3, 1, 0$ ont des fonctions de hauteur comparables pour l'ordre composante à composante mais pas pour l'ordre induit par les configurations récurrentes.

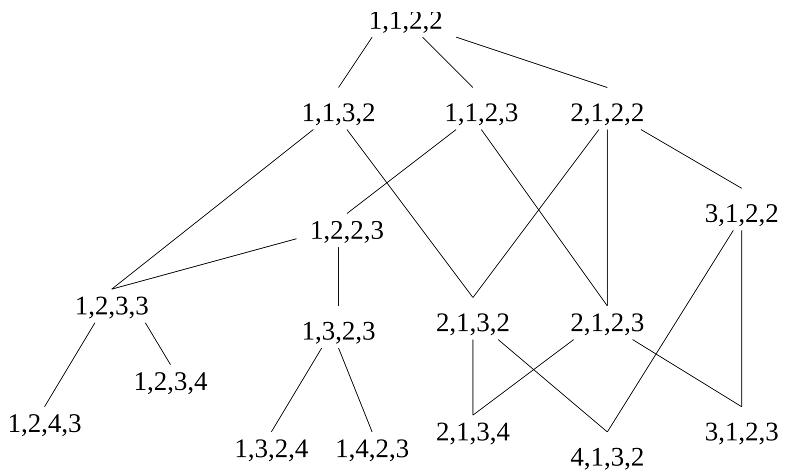


FIG. 6.5 – *L'ordre sur les configurations récurrentes de la figure 6.3 quotienté par les fonctions de hauteur.*

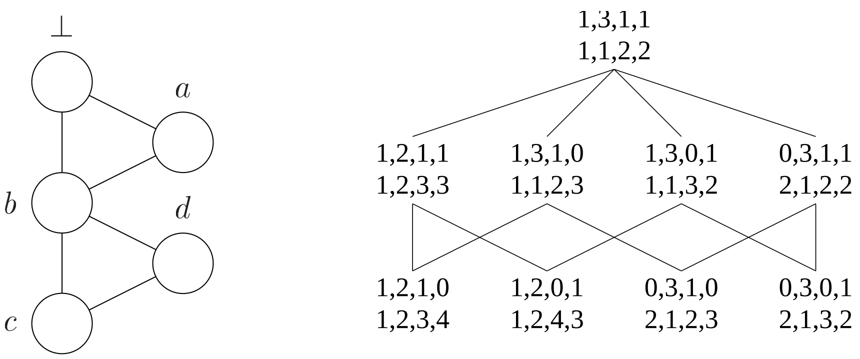


FIG. 6.6 – *Un graphe, et l'ordre sur ses configurations récurrentes. En dessous de chaque configuration récurrente figure sa fonction de hauteur.*

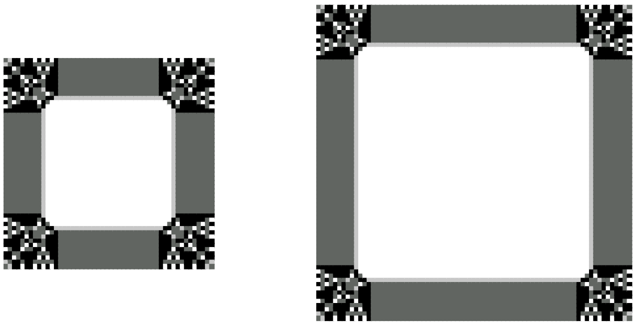


Fig. 6.7 – *L'étape 100 de l'algorithme thermique sur les grilles* 50×50 *et* 75×75

6.2 Algorithme thermique sur une grille infinie

L'étude de l'identité du groupe des configurations récurrentes sur une grille est une question qui soulève beaucoup d'intérêt, en grande partie en raison de sa structure auto-similaire [50, 18, 13]. Un des principaux moyens de calculer cette configuration est l'algorithme thermique, présenté dans le chapitre 3. Cet algorithme, à partir d'une grille ne contenant aucun grain, produit une suite de configurations dont la dernière est l'identité. En étudiant cette suite de configurations, nous avons constaté que l'algorithme passe par deux phases distinctes. Dans la première de ces phases, la taille de la grille considérée ne semble pas avoir d'influence sur les configurations obtenues. Nous tentons ici d'isoler cette première phase en présentant une extension infinie de l'algorithme. Les configurations obtenues pendant cette phase présentant de nombreuses similitudes avec les configurations identité de grilles de différentes tailles, cette étude permet de mieux comprendre la forme de l'identité.

6.2.1 Les deux phases de l'algorithme thermique sur une grille finie

En étudiant l'algorithme thermique pour calculer l'identité sur différentes grilles rectangulaires, nous avons constaté qu'en dessous d'un certain nombre d'étapes, la taille de la grille ne semble pas influer sur les configurations obtenues (voir figure 6.7). Pendant cette phase, seules des zones situées dans les coins de la grille sont modifiées de manière significative. Au fur et à mesure que l'algorithme progresse, la taille de ces zones modifiées augmente. Tant que les zones de deux coins ne se sont pas rencontrées au milieu de la grille, les configurations obtenues dans ces zones semblent être les mêmes quelle que soit la taille de la grille. Ces configurations présentent de plus de très fortes similitudes avec les identités calculées sur des grilles carrées. Elles ont notamment la même structure auto-similaire.

Le comportement de l'algorithme change quand les zones modifiées dans les coins grandissent suffisamment pour se rencontrer. On constate alors que le pourtour de la configuration se stablilise, et ne change plus de valeur jusqu'à la fin du calcul. La zone du centre

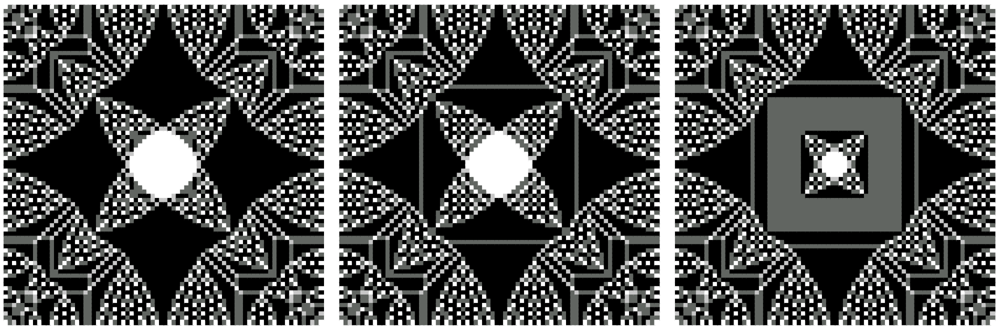


FIG. 6.8 – *Les étape 900, 910 et 960 de l'algorithme thermique sur la grille* 76×76

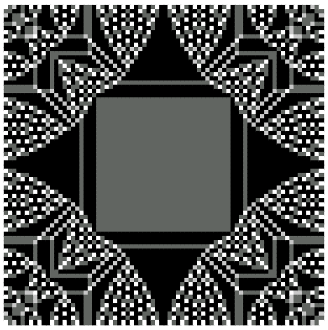


FIG. 6.9 – *L'identité sur la grille* 76×76

continue à évoluer jusqu'à devenir le carré central constitué de 2 qu'on constate dans toutes les identités carrées. Les figures 6.7 et 6.8 illustrent cette deuxième phase.

Pour résumer, on peut dire que l'algorithme procède en deux phases. Dans la première, la configuration des coins de la grille évolue jusqu'à atteindre la forme finale. Elle présente à chaque étape une forte structure auto-similaire. Dans la deuxième phase, le pourtour de la configuration a atteint sa valeur finale et n'est plus modifié. Le carré central de 2 se forme.

6.2.2 Extension infinie de l'algorithme thermique

Suite à ces constatations, nous avons étudié la première phase de l'algorithme thermique. Pour ceci, il est nécessaire que la taille de la grille soit suffisamment grande pour que les zones modifiées des coins ne se rencontrent pas.

Ceci nous a amenés à considérer une grille infinie, dont on observe le coin supérieur gauche. Chaque case est indicée par un couple d'entiers naturels. Le coin est la case d'indice $(0, 0)$, et les cases des bords ont pour indices $(0, k)$ ou $(k, 0)$. Ébouler le puits dans cette grille consiste à rajouter deux grains sur le coin, et un grain sur les sommets des bords. La figure 6.10 présente cette grille, et la configuration β obtenue après l'éboulement du puits,

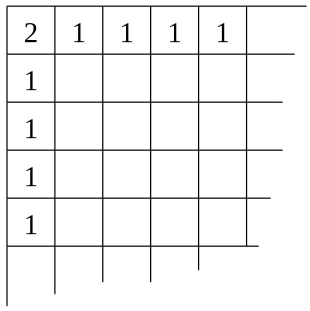


FIG. 6.10 – *La grille infinie et la configuration β*

la grille étant initialement vide.

En partant d'une configuration donnée, nous allons étudier l'algorithme thermique et la façon dont la configuration évolue au fil du temps. On remarque que, contrairement à ce qui se passe pour une grille de taille finie, cet algorithme ne se termine jamais. Nous allons faire cette étude pour deux configurations particulières : $\boxed{0}$ et $\boxed{1}$. En partant d'une de ces configurations, nous allons étudier la suite (infinie) de configurations obtenues en :

– éboulant le puits
– relaxant la configuration obtenue.

À chaque étape, la configuration obtenue est symétrique par rapport à la diagonale de la grille. En effet, la configuration de départ est symétrique, et ni ébouler le puits, ni pratiquer la relaxation ne casse cette symétrie. Nous considèrerons donc uniquement les lignes de la configuration, la valeur des colonnes pouvant être obtenue par symétrie. On se convainc facilement que, après un nombre quelconque d'étapes de l'algorithme thermique, à partir d'une certaine distance du coin la configuration devient régulière au sens suivant : si on considère une ligne de la grille, il existe un certain entier k tel que toutes les cases à partir de la k^{e} contiennent le même nombre de grains. D'autre part, le nombre de lignes dont la valeur au-delà d'un tel entier k est différente de la valeur initiale est fini : les modifications apportées à la configuration au bout d'un temps fini n'atteignent que les case situées en dessous d'une certaine distance du bord.

Nous dirons que la configuration est régulière à partir du rang k si, pour toutes les lignes, les cases, à partir de la k^{e}, ont toutes la même valeur. Dans la suite, pour distinguer les différentes parties de la configuration, nous parlerons du *coin modifié* pour désigner la partie non régulière située dans le coin de la grille. Soit k_0 le plus petit entier tel que une configuration donnée est régulière à partir du rang k. Nous définissons k_0 comme étant la *taille* du coin modifié de cette configuration.

6.2.3 Algorithme thermique à partir de $\boxed{0}$

Dans cette section nous étudions l'algorithme thermique sur la grille infinie en partant de la configuration $\boxed{0}$, c'est-à-dire la configuration dans laquelle la grille ne contient aucun grain.

Observons les premières étapes de l'algorithme thermique (les cases dans lesquelles ne figure aucune valeur ne contiennent aucun grain). La première configuration, non représentée, est $\boxed{0}$.

L'éboulement du puits est représenté par $\xrightarrow{\perp}$, et $\longrightarrow$ désigne une étape de relaxation d'une configuration instable.

$$\xrightarrow{\perp} \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$$\xrightarrow{\perp} \begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\ 2 & & & & \\ 2 & & & & \\ 2 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 2 & 2 & \cdots \\ 3 & & & & \\ 2 & & & & \\ 2 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$$\xrightarrow{\perp} \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 3 & 3 & \cdots \\ 4 & & & & \\ 3 & & & & \\ 3 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 4 & 0 & 4 & 3 & \cdots \\ 0 & 2 & & & \\ 4 & & & & \\ 3 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 0 & 4 & \cdots \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 0 & 1 & & & \\ 4 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 1 & 1 & \cdots \\ 2 & 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Avant le dernier éboulement du puits de cette séquence (dernière configuration de la deuxième ligne), les cases de la première ligne (à partir de la troisième) contiennent toutes deux grains. Quand on éboule le puits, on ajoute un grain sur chaque case du bord. Toutes les cases de la première ligne (à partir de la troisième) contiennent trois grains. La deuxième case de cette ligne est instable. Quand elle s'éboule, elle donne un grain à chacune de ses voisines, et notamment à sa voisine de droite. Celle-ci devient à son tour instable, et quand elle s'éboule donne un grain à chacune de ses voisines, y compris sa voisine de droite, et ainsi de suite. La grille étant infinie, cette suite d'éboulements ne s'arrête jamais. Cependant, on peut constater que chaque case de la première ligne s'éboule après un temps fini, et prend la valeur 1 quand sa voisine de droite s'éboule à son tour. Ceci nous permet d'écrire en généralisant que la partie régulière de la première ligne est instable, et que quand elle s'éboule elle prend une valeur de 1.

Comparons maintenant les premières étapes de l'algorithme thermique sur la grille infinie avec ce qui se passe dans une grille finie suffisamment grande (de taille supérieure ou égale à 4).

$$\xrightarrow{\perp} \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\perp} \begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\perp} \begin{matrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 4 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

On constate que les éboulements dans le coin supérieur gauche se passent exactement de la même façon dans la grille finie que dans la grille infinie. On se convainc facilement que ceci reste vrai, pour ces premières étapes, quelle que soit la taille de la grille, tant qu'elle reste supérieure à quatre.

Ceci a amené l'hypothèse que nous avons présenté sur la première phase de l'algorithme thermique, et amène à penser que ceci reste vrai quel que soit le nombre d'étapes considéré :

Conjecture 6.4 *Soit u la configuration obtenue sur la grille infinie après n étapes de l'algorithme thermique. Soit k la taille du coin modifié dans u. Alors, pour toute grille rectangulaire de taille $2l \times 2p$ avec $l, p > k$, la configuration v obtenue après n étapes de l'algorithme thermique est telle que $v_{i,j} = u_{i,j}$, pour tous $i, j \leq k$.*

Nous avons vu dans le chapitre 3 que l'identité sur une grille carrée de côté pair est telle que les cases des deux colonnes centrales contiennent toujours soit deux, soit trois grains. Dans la grille infinie, ceci semble rester vrai pour les cases qui sont à la frontière du coin modifié et de la partie régulière de la configuration. De plus, nous avons également constaté que la partie régulière d'une ligne a toujours une valeur inférieure de un à la valeur de la case du coin modifié qui lui est adjacente :

Conjecture 6.5 *Dans la partie régulière de toute configuration obtenue en appliquant l'algorithme thermique à partir de $\boxed{0}$, toutes les lignes dont la partie régulière n'est pas 0 sont de la forme $\alpha 32^\omega$ ou $\alpha 21^\omega$, où $\alpha 3$ et $\alpha 2$ représentent la valeur de la ligne dans le coin modifié.*

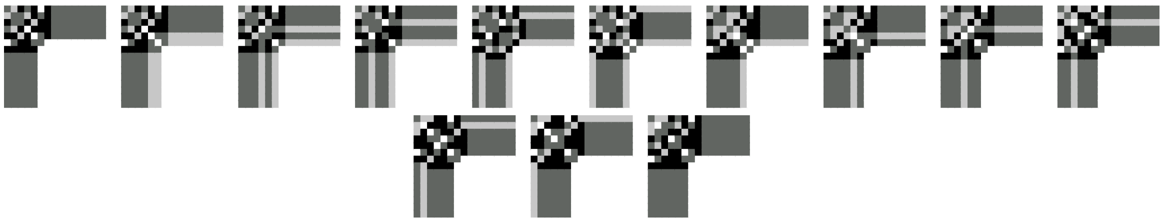


FIG. 6.11 – *L'algorithme thermique sur la grille infinie. Étapes 29 à 41*

La partie régulière modifiée par l'algorithme serait donc toujours constituée de lignes valant 1 ou 2, De plus, l'évolution de cette partie régulière est prévisible.

Supposons qu'à une étape donnée la configuration ait la forme suivante (C représente le coin modifié) :

C	3	2	2	2	...
	3	2	2	2	...
	3	2	2	2	...
	0	0	0	0	...

Quand on éboule le puits dans cette configuration, on obtient la configuration suivante, où $C + \beta$ représente la configuration obtenue à partir de C en éboulant le puits.

$C + \beta$	4	3	3	3	...
	3	2	2	2	...
	3	2	2	2	...
	0	0	0	0	...

La partie régulière de la première ligne est donc instable, et quand elle s'éboule on obtient la configuration :

$C + \beta$	1	1	1	1	...
	4	3	3	3	...
	3	2	2	2	...
	0	0	0	0	...

Pour l'instant on suppose que les cases du coin modifié (dans la partie notée $C + \beta$) ne se sont pas éboulées. La case représentée la plus à gauche de la première ligne prend donc pour l'instant la valeur 1 : elle contenait 4 grains, en a perdu autant en s'éboulant, et en a gagné un lorsque sa voisine de droite s'est éboulée. La partie régulière de la deuxième ligne est alors instable ; elle s'éboule donc et on obtient :

$C+\beta$	2	2	2	2	...
	1	1	1	1	...
	4	3	3	3	...
	0	0	0	0	...

La deuxième ligne, en s'éboulant, a rendu un grain à chaque case de la première ligne, qui reprend donc une valeur de 2. La partie régulière de la troisième ligne est maintenant instable ; elle s'éboule donc :

$C+\beta$	2	2	2	2	...
	2	2	2	2	...
	1	1	1	1	...
	1	1	1	1	...

La partie régulière de la configuration est maintenant stable.

En ce qui concerne le coin modifié, nous avons constaté qu'il se comporte à cette étape comme une configuration récurrente quand on éboule le puits, c'est-à-dire que toutes ses cases s'éboulent une fois. Cependant, à la différence d'une configuration récurrente, on n'obtient pas à nouveau la configuration C après la relaxation : certaines cases voisines du coin modifié ne se sont pas éboulées, et donc des grains ont été perdus vers la partie régulière de la configuration. Les cases de la dernière ligne représentée ne se sont en effet pas éboulées. Si C' est la configuration obtenue lorsque toutes les cases du coin modifié s'éboulent, on obtient alors la configuation stable suivante :

C'	3	2	2	2	...
	3	2	2	2	...
	2	1	1	1	...
	2	1	1	1	...

La conjecture 6.5 est donc à nouveau vérifiée pour cette configuration.

Il est intéressant de constater que, lors de cette étape, le système n'a pas gagné de grains. En effet, tous les grains qui ont été ajoutés lors de l'éboulement du puits ont été perdus lorsque les sommets du bord se sont éboulés. Ajouter des grains sur le bord a permis au système de se réorganiser, en conservant le même nombre de grains. Cette réorganisation a pris la forme d'une baisse de hauteur : la dernière ligne avait une valeur de 2, elle a été remplacée par deux lignes de valeur 1.

Aux étapes suivantes, cette baisse de hauteur remonte, à la manière d'une vague, jusqu'à la première ligne de la grille. Le système ne gagne toujours pas de grains. Quand on éboule le puits, on passe par les configurations suivantes :

$C'+\beta$	4	3	3	3	...
	3	2	2	2	...
	2	1	1	1	...
	2	1	1	1	...

$C' + \beta$	1	1	1	1	…
	4	3	3	3	…
	2	1	1	1	…
	2	1	1	1	…

$C' + \beta$	2	2	2	2	…
	1	1	1	1	…
	3	2	2	2	…
	2	1	1	1	…

Nous avons constaté qu'à cette étape toutes les cases de C' ne s'éboulent pas. Celles qui s'éboulent sont celles qui sont à une distance du bord inférieure ou égale au nombre de lignes de la partie régulière qui se sont éboulées. Celles qui sont plus bas restent stables. On remarque que ceci n'est pas différent du comportement de C lors de la première étape, où toutes les cases de C s'étaient éboulées car toutes les lignes de la partie régulière s'étaient éboulées. On obtient la configuration stable suivante :

C''	3	2	2	2	…
	2	1	1	1	…
	3	2	2	2	…
	2	1	1	1	…

On constate que dans cette configuration une des lignes qui a une hauteur moindre que les autres est remontée d'un cran vers le bord.

Le même procédé se produit à nouveau, et la configuration stable suivante est :

C''	2	1	1	1	…
	3	2	2	2	…
	3	2	2	2	…
	2	1	1	1	…

À l'étape suivante, lors de l'éboulement du puits, le système gagne des grains : toutes les cases de la première ligne qui valaient 1 reçoivent un grain, atteignent une valeur de 2 et ne s'éboulent pas :

C'''	3	2	2	2	…
	3	2	2	2	…
	3	2	2	2	…
	2	1	1	1	…

Il y a maintenant dans la partie régulière une seule ligne qui a une valeur plus faible que les autres, celle qui est la plus éloignée du bord. Au cours des étapes suivantes, elle remonte de la même façon que la précédente jusqu'à atteindre le bord, sans que le système gagne

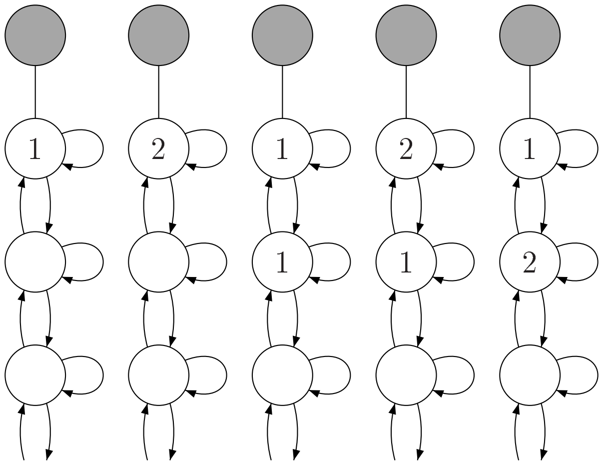


Fig. 6.12 – *Le CFG représentant l'évolution de la partie régulière*

de grains. Quand elle atteint le bord, l'éboulement suivant du puits la fait passer d'une valeur de 1 à une valeur de 2, et le nombre de grains présents dans le système augmente.

La partie régulière évolue donc en pratique de la façon suivante : des lignes de 1 se forment en bas et remontent jusqu'en haut. Les valeurs des lignes évoluent comme les configurations stables du CFG de la figure 6.12, quand à chaque étape on éboule le puits. Les sommets de ce CFG représentent les lignes de la partie régulière de la configuration. Le puits représente l'extérieur de la grille. Les sommets de ce CFG sont instables quand ils contiennent trois grains, tout comme ce que nous avons observé pour les lignes de la partie régulière, et quand un sommet s'éboule il donne un grain à son voisin du dessus et un à son voisin du dessous.

On constate que le coin modifié de la configuration contient des motifs triangulaires de même forme que ceux qu'on observe dans l'identité. Ces motifs semblent évoluer au même rythme que les vagues de lignes de valeur 1 qui remontent dans la partie régulière. Dans la figure 6.13 par exemple, on distingue dans le coin modifié de la première étape représentée deux motifs triangulaires dont l'axe est dans la diagonale. Dans cette figure, on voit dans la partie régulière de la configuration une ligne de valeur 1 qui est initialement au bas de la partie régulière, et qui remonte étape par étape jusqu'au bord. Tant que cette ligne est à une profondeur supérieure à celle des motifs triangulaires, ceux-ci ne sont pas modifiés. Cette partie de la configuration change quand la ligne de 1 atteint cette profondeur. Après son passage, les deux motifs triangulaires sont présents, mais ils sont rayés par des cases de valeur différente. Cette évolution présente des régularités, mais est difficilement prévisible.

Enfin, nous avons constaté que la taille du coin modifié augmente de un après le passage de chaque ligne de 1. Cependant, on ne sait pas prévoir avec exactitude le moment où la taille du coin modifié augmente.

Pour résumer, les constatations que nous avons faites nous ont mené à deux conjectures :

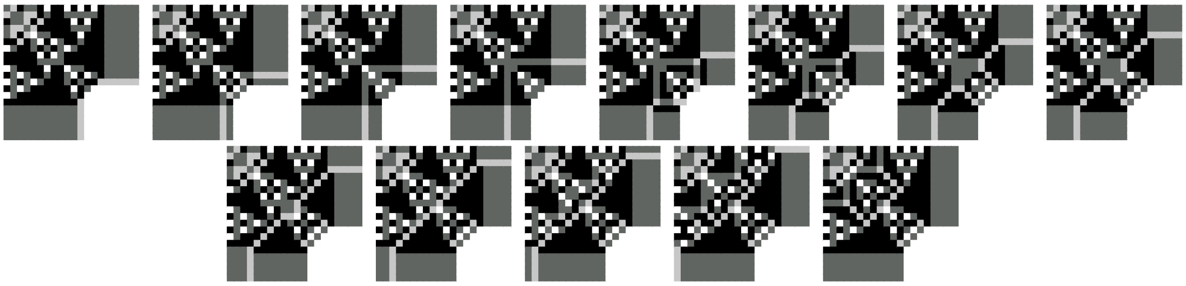


FIG. 6.13 – *les étapes 143 à 155 de l'algorithme thermique sur la grille infinie*

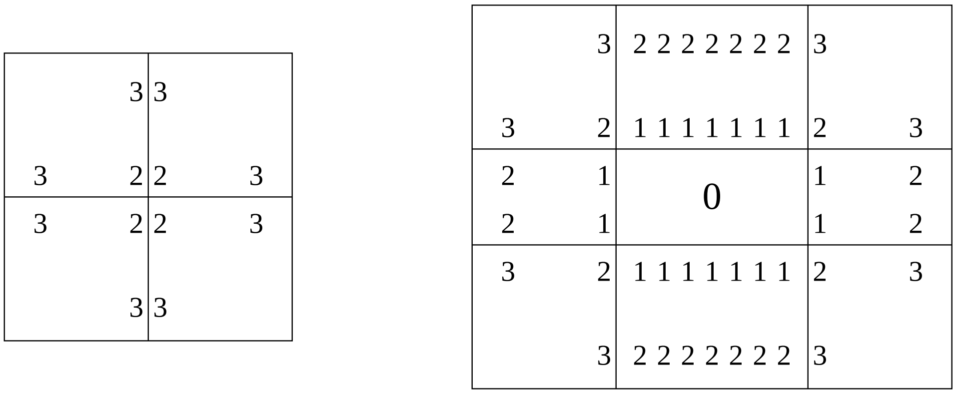


FIG. 6.14 – *Une configuration qui est dans la même classe que l'identité*

- la taille de la grille n'influe pas sur la configuration des coins (conjecture 6.4) ;
- si u est une configuration obtenue par l'algorithme thermique, et que k est la taille du coin modifié dans u, alors si la case (i, k) vaut trois, toutes les cases de la i^{e} ligne dans la partie régulière valent 2, et si (i, k) vaut deux, toutes les cases de la i^{e} ligne dans la partie régulière valent 1, les autres valeurs n'apparaissant pas (conjecture 6.5).

Ceci amène à penser que la configuration obtenue à partir de l'identité sur la grille $2p \times 2p$ en rajoutant k lignes et l colonnes, et en plaçant dans les cases ainsi ajoutées 1 ou 2 grains en fonction de la valeur des cases voisines, est dans la même classe que l'identité :

Conjecture 6.6 *Soit I la configuration identité sur la grille $2p \times 2p$. Si u est la configuration sur la grille $n \times m$, avec $n = 2p + k$ et $m = 2p + l$, obtenue à partir de I de la façon suivante :*

- $u_{i,j} = u_{n-i+1,j} = u_{i,m-i+1} = u_{n-i+1,m-j+1} = I_{i,j}$, *pour tous* $i, j < p$;
- $u_{i,j} = u_{n-i+1,j} = I_{i,p} - 1$ *pour tous* $i < p$, $p < j < p + k$;
- $u_{i,j} = u_{i,m-i+1} = I_{p,j} - 1$ *pour tous* $p < j < p + l + 1$, $j < p$;
- $u_{i,j} = 0$ *pour tous* $p < i < p + k + 1$, $p < j < p + l + 1$,

alors u est dans la même classe que l'identité sur la grille $n \times m$.

Voir la figure 6.14 pour un exemple de cette construction

FIG. 6.15 – *La configuration* $\bar{1}$ *sur la grille* 100×100

Cette conjecture vient directement de la comparaison entre les configurations identités sur des grilles de taille $2p \times 2p$ et $(2p+1) \times (2p+1)$. On constate en effet que la configuration obtenue en ajoutant au plus une ligne et une colonne est récurrente : l'identité étant symétrique, lorsqu'on éboule le puits les cases des coins s'éboulent. Les cases ayant été insérées contiennent deux ou trois grains. Donc quand leurs voisines s'éboulent elles deviennent instables et s'éboulent à leur tour. La case centrale ne contient aucun grain. Quand ses quatre voisines s'éboulent elle reçoit quatre grains, elle devient donc instable et s'éboule à son tour. Donc toutes les cases de la grille s'éboulent lorsqu'on éboule le puits, donc la configuration est récurrente.

Nous avons vérifié expérimentalement cette conjecture pour des valeurs de k et l quelconques. Cependant, cela ne donne pas directement d'informations sur l'identité sur la grille $(2p+k) \times (2p+l)$, car les configurations qu'on obtient alors ne sont pas récurrentes : plusieurs cases adjacentes contiennent des zéros, ce qui n'est pas possible dans une configuration récurrente (proposition 3.4). Pour obtenir l'identité, il faut donc à nouveau pratiquer l'algorithme thermique, ce qui modifie de façon significative la configuration.

6.2.4 Algorithme thermique à partir de $\boxed{1}$

Nous avons constaté que, pour le calcul de la configuration $\bar{1}$, qui est la configuration récurrente de la classe de $\boxed{1}$, l'algorithme thermique ne passe que par une seule phase. Cette phase est de même nature que la première phase observée lors du calcul de l'identité : seuls les coins de la configuration sont modifiés de manière significative, et les configurations obtenues ne semblent pas dépendre de la taille de la grille. Ceci donne lieu à la conjecture suivante, qui est l'analogue de la conjecture 6.4 :

Conjecture 6.7 *Soit u la configuration obtenue sur la grille infinie après n étapes de l'algorithme thermique en partant de la configuration* $\boxed{1}$. *Soit k la taille du coin modifié dans u. Alors, pour toute grille rectangulaire de taille $2l \times 2p$ avec $l, p > k$, la configuration*

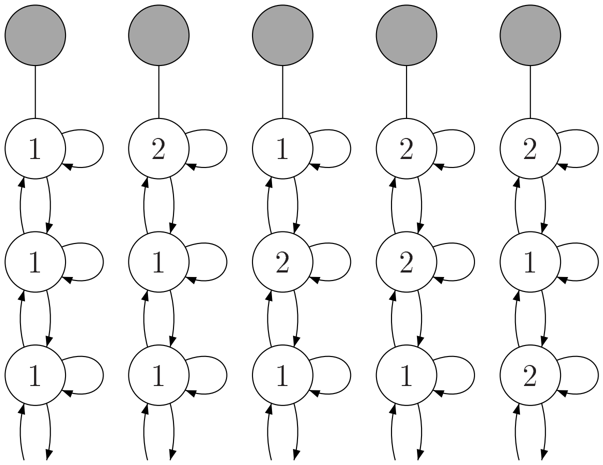


FIG. 6.16 – *Le CFG représentant l'évolution de la partie régulière de la configuration lors de l'algorithme thermique à partir de* $\boxed{1}$

v obtenue après n étapes de l'algorithme thermique à partir de $\boxed{1}$ *est telle que* $v_{i,j} = u_{i,j}$, *pour tous* $i, j \leq k$.

Cependant, contrairement à ce qu'il se passe lors du calcul de l'identité, il n'y a pas de deuxième phase : quand les coins modifiés se rencontrent, l'algorithme se termine.

Nous avons donc étudié l'évolution de l'algorithme thermique sur la grille infine, en partant de la configuration $\boxed{1}$. De nombreuses similitudes existent entre ce calcul et celui effectué à partir de la configuration $\boxed{0}$. Les configurations du coin modifiés présentent également de fortes similitudes avec la configuration $\bar{1}$ sur des grilles finies, et l'évolution de la partie régulière de la configuration est à nouveau prévisible.

Cependant, l'évolution de l'algorithme semble beaucoup plus régulière à partir de $\boxed{1}$ qu'à partir de $\boxed{0}$. En effet, l'évolution de la configuration du coin modifié est plus prévisible. D'autre part, à certaines étapes que nous préciserons plus tard, si k est la taille du coin modifié, alors le coin modifié est exactement dans la même configuration que dans la configuration $\bar{1}$ sur une grille $2k \times 2k$.

Évolution de la partie régulière

Nous avions constaté que, lors de l'algorithme thermique à partir de $\boxed{0}$, les valeurs des parties régulières des lignes sont toujours 1 ou 2. Ceci semble également vrai quand on part de la configuration $\boxed{1}$. La conjecture suivante est l'équivalent de la conjecture 6.5 :

Conjecture 6.8 *Dans la partie régulière de toute configuration obtenue en appliquant l'algorithme thermique à partir de* $\boxed{1}$, *toutes les lignes sont de la forme* $\alpha 32^\omega$ *ou* $\alpha 21^\omega$.

De la même façon que lors de l'évolution de l'algorithme thermique à partir de $\boxed{0}$, les valeurs des lignes dans la partie régulière évoluent comme les configurations stables du

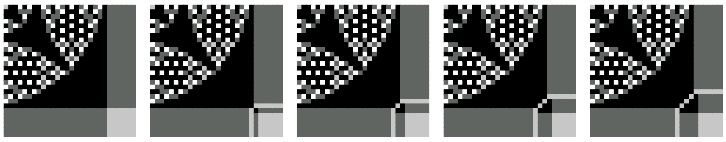


FIG. 6.17 – *L'algorithme thermique dans la grille infinie en partant de* $\boxed{1}$ *: étapes 252 à 256.*

FIG. 6.18 – *L'algorithme thermique dans la grille infinie en partant de* $\boxed{1}$ *: étapes 268 à 275.*

CFG de la figure 6.12, quand on éboule le puits à chaque étape. Dans ce cas cependant, la configuration initiale du CFG est celle où toutes les cases contiennent un grain. La figure 6.16 illustre ceci.

Évolution du coin modifié

Au cours de l'algorithme thermique sur la grille infinie à partir de $\boxed{1}$, les configurations du coin modifié présentent de fortes similitudes avec la configuration $\bar{1}$. Comparer par exemple les figures 6.15 et 6.17. Dans les deux cas, on constate que le coin modifié contient deux motifs de forme triangulaire. Ces deux triangles ont la même forme, mais pas la même taille. Ces triangles sont formés de cases contenant trois grains. Selon les cas, ces motifs peuvent être uniformes, ou alors parcourus par des lignes de cases ayant des valeurs différentes.

De la même façon que lors de l'évolution de l'algorithme thermique à partir de $\boxed{0}$, l'évolution de la configuration du coin modifié se fait en fonction du passage des lignes de valeur 1 qui remontent dans la partie régulière. Cependant, dans le cas présent, cette évolution est plus prévisible.

Dans la première configuration de la figure 6.17, le coin modifié est divisé en deux parties : la partie inférieure droite est composée uniquement de cases contenant trois grains. Dans la partie supérieure gauche, on observe un triangle dont l'axe est dans la diagonale, ainsi qu'un deuxième triangle de même forme, beaucoup plus petit, dans le coin. Ces deux triangles sont uniformes. Quand on éboule le puits à partir de cette configuration, dans la

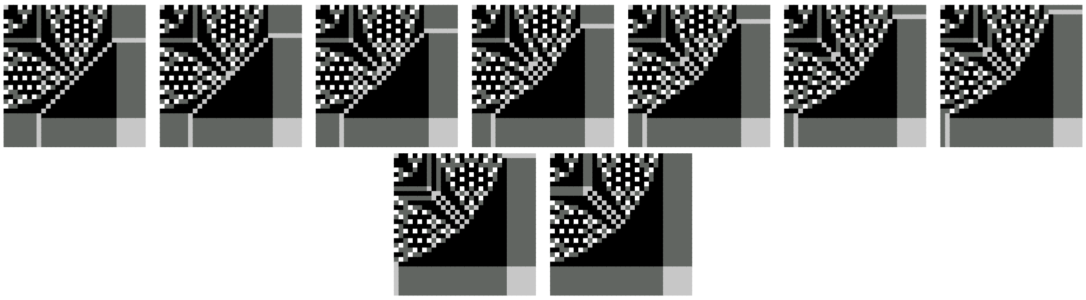


FIG. 6.19 – *L'algorithme thermique dans la grille infinie en partant de* $\boxed{1}$ *: étapes 291 à 299.*

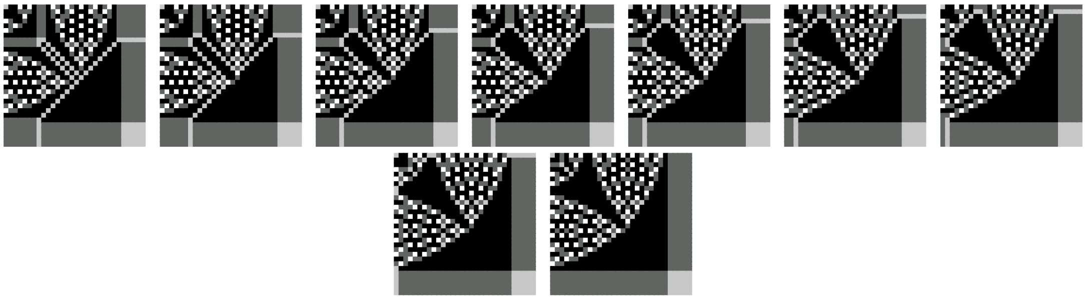


FIG. 6.20 – *L'algorithme thermique dans la grille infinie en partant de* $\boxed{1}$ *: étapes 316 à 324.*

partie régulière une ligne de valeur 1 commence à remonter. Dans le coin modifié, cela se traduit au début par une évolution régulière : une ligne diagonale de cases contenant un grain apparaît dans la partie inférieure droite.

L'évolution change quand la vague de 1 qui remonte touche le motif triangulaire (voir figure 6.18) Le plus grand des deux triangles est modifié. Il est maintenant séparé par des lignes joignant son centre au trois coins.

Lorsqu'une nouvelle ligne de valeur 1 commence à remonter, le début de l'évolution se passe de la même manière que dans la figure 6.17. Quand les modifications atteignent le triangle, il est à nouveau modifié (figure 6.19) : le motif présent au centre du premier triangle se dédouble. À la fin de la vague (étape 299), le triangle est rayé par deux ensembles de lignes joignant son centre à ses coins.

On remarque que le reste de la configuration n'a pas changé pendant ces étapes. Aux étapes 252, 275 et 299, les parties de la configuration situées à droite et au dessous du grand triangle sont les mêmes.

Après l'étape 299 (la dernière de la figure 6.19), une nouvelle ligne de valeur 1 commence à remonter dans la partie régulière. Quand elle touche le grand triangle (figure 6.20), il est encore une fois modifié : on voit les deux lignes diagonales s'écarter vers l'extérieur au fur et à mesure que la ligne de 1 remonte, pour finalement disparaître. Dans la dernière configuration de la figure, le triangle est à nouveau uniforme, comme il l'était dans la figure 6.17. Cependant, bien qu'il ait la même forme que dans cette configuration, il est plus grand.

Par contre, le petit triangle situé dans le coin, qui était resté uniforme au cours de toutes ces étapes, a été modifié : il est à son tour rayé par des lignes reliant son centre à ses coins.

À cette étape, les parties de la configuration situées à droite et en dessous du grand triangle ne sont plus les mêmes qu'aux étapes précédentes.

L'expérience montre que cette situation se répète à toutes les étapes. Les lignes de valeur 1 remontent l'une après l'autre. Après le passage de chaque ligne, le plus grand triangle est modifié de la façon suivante :

- s'il est uniforme, il devient rayé par un jeu de lignes ;
- s'il est rayé par un jeu de lignes, il devient rayé par deux jeux de lignes ;
- s'il est rayé par deux jeux de lignes il redevient uniforme.

Tous les autres triangles changent d'état selon le même schéma quand le triangle situé immédiatement en dessous et à droite passe de l'état où il est rayé par deux jeux de lignes à celui où il est uniforme.

On constate dans les figures 6.18 à 6.20 qu'aux étapes où il n'y a aucune ligne de valeur 1 dans la partie régulière de la configuration, le coin modifié est exactement un carré. Nous avons déjà vu que ceci n'est pas le cas pour $\boxed{0}$ (voir par exemple figure 6.11). Ceci est vérifié pour toutes les configurations de ce type. Nous avons également fait la constatation suivante : si u est une telle configuration, et si k est la taille du coin modifié dans u, alors cette configuration est exactement le coin de la configuration $\bar{1}$ sur la grille de taille $2k \times 2k$:

$$\bar{1}_{i,j} = u_{i,j} \text{ pour tous } i, j < k.$$

6.3 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre les configurations récurrentes du modèle du tas de sable abélien. Nous avons dans un premier temps considéré l'ensemble des configurations récurrentes sur un même graphe, et les différentes structures d'ordre qu'on peut associer à cet ensemble. Les résultats que nous avons obtenu sur ce sujet ont permis de préciser et approfondir certains résultats déjà connus.

Puis nous nous sommes focalisés sur l'algorithme thermique, utilisé pour calculer la configuration récurrente équivalente à une configuration de départ donnée. Nous avons constaté que cet algorithme se décompose en deux phases bien distinctes lors du calcul de l'identité. Nous avons isolé la première de ces phases en présentant une extension infinie de cet algorithme, et nous avons étudié l'ensemble des configurations produites par cette extension. Ces configurations ont toutes de nombreux points communs, qu'elles partagent également avec l'identité sur la grille finie. Étudier ces configurations nous a donc permis ce mieux comprendre certaines des propriétés de cette configuration remarquable.

Nous avons ensuite étudié cette même extension infinie de l'algorithme, en prenant comme point de départ une nouvelle configuration, notée $\boxed{1}$ dans laquelle chaque case contient exactement un grain. Nous avons constaté que, bien que l'évolution de l'algorithme sur cette configuration présente de nombreuses similitudes avec le calcul de l'identité, elle est par contre plus simple à étudier.

La suite de nos travaux s'est donc naturellement tournée vers l'étude de $\bar{1}$, la configuration récurrente équivalente à $\boxed{1}$. Nous étudions cette configuration dans le chapitre suivant.

Nous avons mis en évidence le rôle joué par la configuration $\bar{1}$ qui n'avait jamais été considérée jusqu'ici et dont nous avons montré les similitudes avec la configuration identité. Il serait intéressant de rechercher d'autres configurations qui partageraient ces caractérisitiques et qui pourraient donner lieu à des développements plus détaillés.

Une autre direction prometteuse semble être l'étude de la deuxième phase de l'algorithme thermique.

Chapitre 7

La configuration $\bar{1}$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la configuration $\bar{1}$, qui est la configuration récurrente de la classe de $\boxed{1}$, présente un intérêt particulier pour l'étude de certaines configurations récurrentes. Elle partage en effet beaucoup des propriétés de l'identité qui soulèvent un grand intérêt, tout en ayant plus de régularité. Nous présentons dans ce chapitre une conjecture sur la forme comparée de cette configuration sur des grilles de taille différente.

Dans la section 7.2, nous montrons qu'on peut ramener sa résolution à celle d'un cas particulier. Dans la section 7.3, nous nous attachons à l'étude de ce cas particulier, et nous montrons que le résultat repose sur la résolution d'une conjecture plus générale, concernant toutes les configurations récurrentes.

7.1 Préliminaires

Nous avons constaté que les configurations $\bar{1}$ sur des grilles ayant le même nombre de lignes, mais des nombres de colonnes différents, présentent de fortes ressemblances. La figure 7.1 illustre ceci.

Plus généralement, nous avons constaté que la configuration $\bar{1}$ est de la forme suivante :

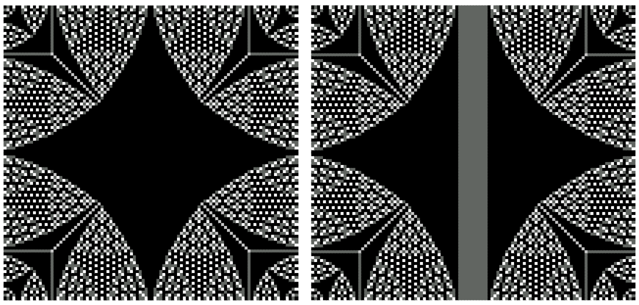


FIG. 7.1 – *Le représentant de la classe de* $\boxed{1}$ *:* $\bar{1}$*, sur des grilles* 100×100 *et* 100×110*.*

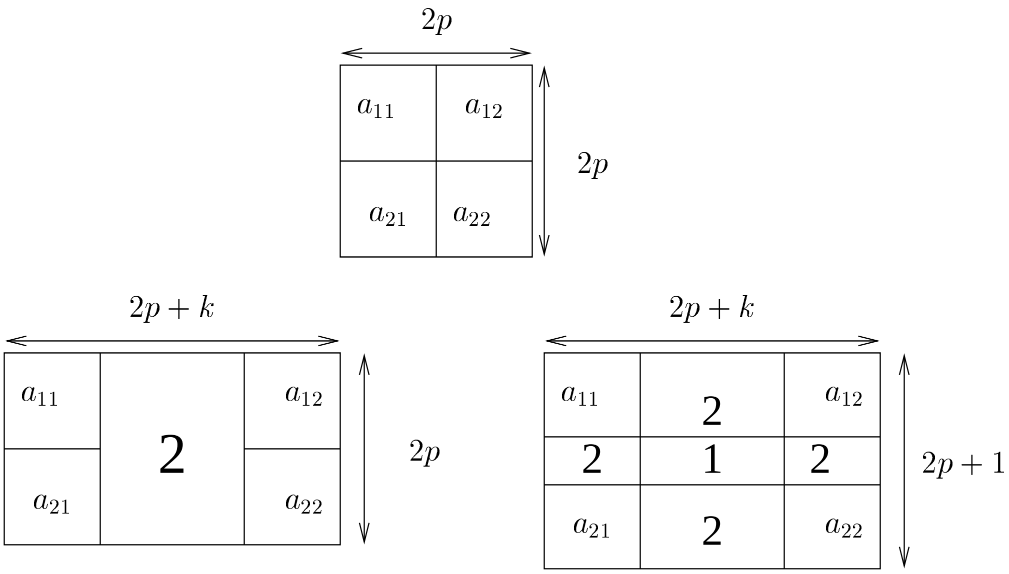


FIG. 7.2 – *La forme générale de la classe de 1*

Conjecture 7.1 *La configuration $E = \bar{1}$ sur une grille $n \times m$, avec $n = 2p+k$ et $m = 2p+l$, est obtenue à partir de la configuration $O = \bar{1}$ sur la grille $2p \times 2p$ de la façon suivante :*
- $E_{i,j} = E_{n-i+1,j} = E_{i,m-j+i} = E_{n-i+1,m-j+1} = O_{i,j}$ *pour tous* i, j, $i \leq p, j \leq p$ *;*
- $E_{i,j} = 2$ *pour tous* i, j, $p+1 \leq i \leq p+k, j \leq p$ *ou* $j \geq p+l$ *;*
- $E_{i,j} = 1$ *pour tous* i, j, $p+1 \leq i \leq p+k, p < j \leq p+l$.

Voir la figure 7.2 pour une illustration de cette construction.

Cette conjecture est l'analogue pour $\bar{1}$ de la conjecture 6.6 sur la forme de l'identité. On constate que les configurations décrites dans cette conjecture sont récurrentes sur toutes les grilles de taille $(2p+k) \times 2p$ ou $(2p+k) \times (2p+1)$: on se convainc facilement que, quand on a éboulé le puits, toutes les cases s'éboulent une fois et une seule. En revanche, si au moins deux lignes et deux colonnes sont ajoutées, la configuration obtenue contient un carré de deux cases sur deux où toutes les cases contiennent un grain, ce qui n'est pas possible dans une configuration récurrente (proposition 3.4).

Notre approche pour étudier cette configuration est la suivante : si une configuration u est dans la classe de $\boxed{1}$, alors si l'on ajoute sur chaque case de u un grain, la configuration obtenue est dans la classe de $\boxed{2}$. D'après la proposition 3.5, cette configuration, étant obtenue à partir de $\bar{1}$ qui est récurrente en ajoutant des grains, est elle-même récurrente. Or, l'unique configuration récurrente de la classe de $\boxed{2}$ est $\boxed{2}$ elle-même ($\bar{2} = \boxed{2}$) [48].

On a donc le résultat suivant :

Théorème 7.2 *Une configuration récurrente u est égale à $\bar{1}$ si et seulement si, lorsqu'on ajoute un grain sur chaque case et qu'on applique la relaxation, la configuration obtenue est $\boxed{2}$ (autrement dit si $\widehat{u + \boxed{1}} = \boxed{2}$)*

Preuve : Si $\widehat{u+\boxed{1}} = \boxed{2}$, alors u est dans la classe de $\boxed{2} - \boxed{1} = \boxed{1}$. Si de plus u est récurrente, alors u est le représentant $\bar{1}$ de $\boxed{1}$. □

Remarquons que lorsqu'on relaxe la configuration $\bar{1}+\boxed{1}$, toutes les cases s'éboulent au moins une fois :

Lemme 7.3 *Soit u la configuration obtenue en ajoutant un grain dans chaque case à la configuration $\bar{1}$ ($u = \bar{1}+\boxed{1}$). Alors u est instable, et pendant la relaxation de u toutes les cases s'éboulent au moins une fois.*

Preuve : Supposons que ce résultat soit faux. Considérons l'ensemble S des cases qui qui ne s'éboulent pas pendant la relaxation. Toutes les cases de S contiennent exactement deux grains après la relaxation, donc toute case de S contient au plus deux grains dans u. D'autre part, comme u est obtenue à partir d'une configuration stable en ajoutant un grain dans chaque case, toutes les cases de S contiennent zéro ou un grain dans $\bar{1}$. Comme chaque case de la grille contient exactement deux grains après la relaxation, toutes les cases de S ont au plus une voisine qui n'est pas dans S.

On en conclut que soit S est constitué de toutes les cases du bord de la grille, soit S contient au moins quatre cases qui forment un carré. Dans les deux cas, la configuration $\bar{1}$ ne peut pas être récurrente : si toutes les cases du bord sont dans S, elles contiennent toutes au plus un grain dans $\bar{1}$, et donc quand on éboule le puits aucune case ne devient instable. Si S contient un carré de deux cases sur deux, $\bar{1}$ contient un carré de deux cases sur deux contenant au plus un grain, ce qui n'est pas possible pour une configuration récurrente (proposition 3.4).

On obtient donc une contradiction, et donc toutes les cases de la grille s'éboulent au moins une fois lors de la relaxation. □

7.2 Cas de la grille $(2p+1)\times 2p$

Nous allons à partir de maintenant nous intéresser uniquement à la configuration $\bar{1}$ sur la grille $(2p+1)\times 2p$. Nous allons montrer que les autres cas peuvent se déduire facilement de celui-ci.

Nous définissons la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$ sur cette grille :

Définition 7.4 ($\bar{1}^{\downarrow}$) *Sur la grille $2p\cdot(2p+1)$, nous définissons la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$ à partir de la configuration $\bar{1}$ sur la grille $2p\cdot 2p$ de la façon suivante :*
- $\bar{1}^{\downarrow}_{i,j} = \bar{1}^{\downarrow}_{i,2p-j+2} = \bar{1}_{i,j}$, *pour tous $i,j \le p$;*
- $\bar{1}^{\downarrow}_{i,p+1} = 2$ *pour tout i.*

La figure 7.3 illustre cette construction.

Nous allons montrer qu'à partir de la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$, en ajoutant un grain dans chaque case, on peut atteindre par une suite d'éboulements une configuration très proche de $\boxed{2}$:

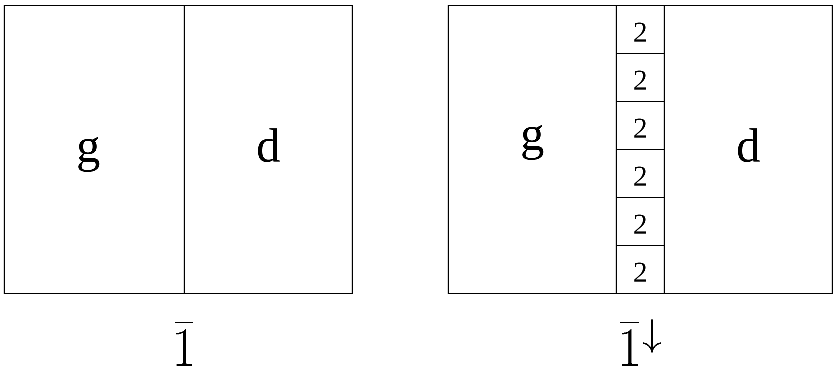


FIG. 7.3 – *La construction de $\bar{1}^{\downarrow}$ à partir de $\bar{1}$*

Lemme 7.5 *Soit u la configuration $\bar{1}^{\downarrow} + \boxed{1}$ sur une grille $2p \times (2p+1)$. À partir de u on peut atteindre par une suite d'éboulements une configuration telle que toute case (i, j), pour $j \neq p+1$, contient exactement deux grains.*

Preuve : Considérons les configurations $\bar{1} + \boxed{1}$ sur la grille G^1 de taille $2p \cdot 2p$, et $\bar{1}^{\downarrow} + \boxed{1}$ sur la grille G^2 de taille $2p \cdot (2p+1)$. Ces deux configurations sont telles que :

$$G^2_{i,j} = G^2_{i,2p-j+2} = G^1_{i,j} = G^1_{i,2p-j+1} \text{ pour tous } i, j, i \leq p.$$

Si cette condition est vérifiée pour deux configurations quelconques sur G^1 et G^2, on dira qu'elles sont *symétriques* et *en correspondance.*

Nous allons ébouler les cases de G^2 de la façon suivante, qu'on appelle *relaxation contrôlée de* $\bar{1}^{\downarrow} + \boxed{1}$. À chaque étape, on considère l'ensemble des cases instables de G^1. Soit (i, j) une telle case. Deux cas sont alors possibles :

- $j \neq p, p+1$. Alors on éboule la case (i, j), sa symétrique, et les cases correspondants de G^2, qui sont toutes instables car les configuration sont symétriques et en correspondance. Les deux configurations des grilles G^1 et G^2 restent symétriques et en correspondance.
- $j = p$ ou $j = p+1$. On éboule dans G^1 les cases (i, p) et $(i, p+1)$, qui sont toutes les deux instables car la configuration est symétrique. Elles perdent 4 grains chacune, et en gagnent un lors de l'éboulement de leur voisine, donc perdent trois grains au total. On éboule dans G^2 les cases (i, p) et $(i, p+2)$, et on éboule de force la case $(i, p+1)$. Les cases (i, p) et $(i, p+1)$ perdent quatre grains lorsqu'elles s'éboulent, et en gagnent un lorsque $(i, p+1)$ s'éboule. Les configurations sur G^1 et G^2 restent donc symétriques et en correspondance.

On arrête ce procédé quand la configuration sur G^1 est stable. D'après le théorème 7.2 la configuration finale de G^1 est $\boxed{2}$. Comme à chaque étape les configurations sur G^1 et G^2 sont en correspondance, la configuration finale sur G^2 est telle que toutes les cases, sauf éventuellement celles de la $(p+1)^e$ colonne, contiennent deux grains. $\square$

Par contre, la méthode que nous avons appliquée ne nous renseigne pas sur la valeur des cases de la $(p+1)^e$ colonne. Ces valeurs ne sont a priori pas comprises entre 0 et 3, et peuvent être aussi bien négatives que positives.

On fait cependant la constatation suivante :

Lemme 7.6 *La configuration $\bar{1}^{\downarrow}$ sur la grille $2p\times(2p+1)$ est égale à $\bar{1}$ si et seulement si, à la fin de la relaxation contrôlée, toutes les cases de la $(p+1)^e$ colonne contiennent exactement deux grains.*

Nous allons maintenant montrer que l'étude de cette configuration peut être ramenée au cas de la grille $2p\times(2p+1)$:

Théorème 7.7 *Si la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$ sur la grille $2p\times(2p+1)$ est égale à $\bar{1}$, alors toutes les configurations sur des grilles $(2p+k)\times(2p+l)$ de la forme décrite dans la conjecture 7.1 sont dans la classe de $\boxed{1}$.*

De plus, si l vaut 0 ou 1, la configuration obtenue est alors récurrente et est donc égale à $\bar{1}$.

Preuve : Supposons que $\bar{1}^{\downarrow}$ soit la configuration récurrente de la classe de $\boxed{1}$ sur la grille G^1 de taille $2p\times(2p+1)$. Soit u une configuration sur la grille G^2 de taille $n\times m$, avec $n=2p+k$ et $m=2p+l$, de la forme donnée dans la conjecture 7.1. Pour prouver le résultat on applique la relaxation contrôlée décrite dans la preuve du lemme 7.5 à partir des configurations $\bar{1}^{\downarrow}+\boxed{1}$ sur G^1 et $u+\boxed{1}$ sur G^2.

Pour tous $i,j\le p$ on appelle les *symétriques* de la case (i,j) les cases (i,j), (j,i) et toutes leurs symétriques par rapport aux axes horizontal et vertical (voir la figure 7.4, les cases noires).

Pour $j=p+1$ on appelle le symétrique de la case (i,j) la case $(2p-i+1,j)$ dans G^1, et toutes les cases

- (i,j), $p+1\le j\le p+l$;
- $(n-i+1,j)$, $p+1\le j\le p+l$;
- (j,i), $p+1\le i\le p+k$;
- (i,j), $p+1\le i\le p+k$

Ceci est représenté sur la figure 7.4 (cases grises).

Les configurations initiales sur G^1 et G^2 sont telles que, pour tout i,j, $j\le p+1$, les valeurs des cases (i,j) et de toutes leurs symétriques sont les mêmes dans G^1 et dans G^2. Si ceci est vérifié pour deux configurations quelconques sur G^1 et G^2, on dira qu'elles sont *symétriques* et *en correspondance*.

On procède de la façon suivante : à chaque étape, on considère l'ensemble des cases instables dans G^1. Soit (i,j), $i\le p, j\le p+1$, une telle case. Deux cas sont possibles :

- $i=p$ et $j=p+1$: on éboule alors la case (i,j) et tous ses symétriques dans G^1 et G^2, ainsi que toutes les cases (i,j), $p+1\le i\le p+k$, $p+1\le j\le p+l$ dans G^2. Les cases de cette zone valaient un dans la configuration initiale, comme on a ajouté un grain dans chaque case elles valent toutes deux. Comme la configuration $\boxed{2}$ est récurrente, ébouler toutes les cases adjacentes revient à ébouler le puits pour une grille

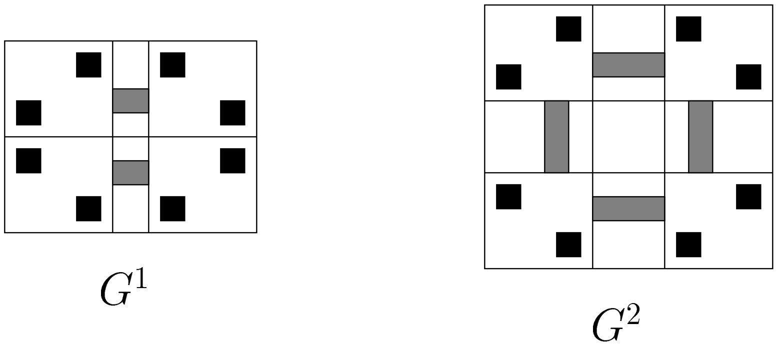


FIG. 7.4 – *Les symétriques d'une case dans les grilles G^1 et G^2*

restreinte à la zone centrale. Donc toutes les cases de la zone centrale s'éboulent, et reprennent une valeur de 2. Les cases du pourtour, elles, perdent quatre grains quand elles s'éboulent, mais en gagnent un quand les cases de la zone centrale s'éboulent, donc perdent trois grains au total.

– $(i,j) \neq (p,p+1)$. On éboule alors les cases (i,j) et leurs symétriques dans G^1 et G^2.

À chaque étape les configurations sur G^1 et G^2 restent symétriques et en correspondance. Comme, à la fin de la relaxation la configuration obtenue sur G^1 est égale à $\boxed{2}$, la configuration obtenue sur G^2 est également $\boxed{2}$.

Pour conclure, il suffit de constater que parmi toutes les configurations que l'on peut construire ainsi, seules celles obtenues sur une grille $(2p+k) \times (2p+l)$, où l vaut 0 ou 1, sont récurrentes. Il est facile de vérifier qu'elles sont récurrentes, et que toute configuration obtenue en rajoutant au moins deux lignes et deux colonnes ne l'est pas, car elle contient un carré dont toutes les cases valent 1, ce qui est un motif exclu pour une configuration récurrente (proposition 3.4). □

7.3 Évolution de la colonne centrale

Nous allons maintenant nous intéresser aux valeurs que prennent les cases de la $(p+1)^e$ colonne lorsqu'on applique la relaxation contrôlée (décrite plus haut) de la configuration $\bar{1}^{\downarrow} + \boxed{1}$.

Selon ce procédé, chaque case $(i,p+1)$ est éboulée uniquement quand on éboule les cases voisines (i,p) et $(i,p+2)$. Cette case reçoit alors un grain de ces deux cases, et perd quatre grains lorsqu'elle s'éboule. Au total, cette case perd donc deux grains, et elle en donne un à sa voisine du dessus et un à sa voisine du dessous. La restriction de la configuration à la $(p+1)^e$ colonne évolue donc selon les règles d'un CFG qui se joue sur le graphe de la Figure 7.5.

Nous parlerons dans la suite de tout CFG défini sur un graphe de ce type, c'est à dire un graphe $G = (V,E)$, défini par :

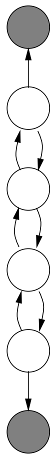


FIG. 7.5 – *Le graphe représentant les éboulements de la $p+1^e$ colonne.*

– $V = \{0, 1, \ldots, n+1\}$;
– $E = \{(1,0), (n, n+1)\} \cup \{(i, i+1), (i+1, i) | i = 1, \ldots, n-1\}$

comme du CFG *représentant une colonne de la grille*. Si le nombre de sommets est $n+2$, un tel CFG représente une colonne d'une grille à n lignes. Dans la suite, n est supposé pair.

On constate que ce graphe est similaire au graphe utilisé pour le codage de $L(n, \theta)$, ainsi nous l'avons vu dans la section 2.2,

Dans la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$ que nous avons définie dans la section précédente, toutes les cases de la $(p+1)^e$ colonne contiennent deux grains. Nous avons montré que la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$ est exactement la configuration $\bar{1}$ si et seulement si, lorsqu'on ajoute un grain dans chaque case de la grille et qu'on relaxe la configuration obtenue, toutes les cases de la $(p+1)^e$ colonne contiennent à la fin deux grains (lemme 7.6).

Nous allons donc nous intéresser à la question de savoir à quelles conditions les valeurs des cases de cette colonne peuvent passer d'une configuration $\boxed{3}$ où elles contiennent toutes trois grains à la configuration $\boxed{2}$ où elles contiennent toutes deux grains.

Nous allons montrer dans un premier temps que, si l'on part d'une configuration initiale pour la $(p+1)^e$ colonne où chaque case contient exactement 3 grains (ce qui est le cas quand on a rajouté un grain dans chaque case de $\bar{1}^{\downarrow}$), alors il est possible d'atteindre une configuration où chaque case contient exactement deux grains. Nous utiliserons pour cela des résultats développés pour l'étude des espaces des configurations des modèles dynamiques discrets :

Théorème 7.8 *[32] Une partition a appartient à $L(n, \theta)$ si et seulement si :*

– *pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, $a_i - a_{i+1} \geq \theta - 2$, et*
– *a ne contient aucune séquence de la forme : $k, (k-\theta+2), (k-2\times\theta+3), \ldots, (k - l\times\theta+l+1), (k-(l+1)\times\theta+l+3)$, pour un $l \geq 1$.*

Théorème 7.9 *[32] Soient a et b deux éléments de $L(n,\theta)$. Alors b peut être atteint à partir de a par une avalanche si et seulement si b est plus petit que a pour l'ordre de dominance, c'est-à-dire pour tout i, $\sum_{j=1}^{j=i} a_j \geq \sum_{j=1}^{j=i} b_j$.*

Nous allons montrer que, pour un CFG représentant une colonne de la grille, les configurations $\boxed{3}$ et $\boxed{2}$ sont toutes deux des éléments de $L(m,2)$, pour un certain m qui est le nombre total de grains dans le système, puis que l'on peut passer de la première à la deuxième par une suite d'éboulements.

Théorème 7.10 *Soit C un CFG représentant une colonne de la grille, avec un nombre pair n de cases. Alors, si on part de la configuration intiale $\boxed{3}$ telle que chaque sommet contient trois grains, on peut atteindre la configuration $\boxed{2}$ telle que chaque sommet contient exactement deux grains.*

Preuve : Nous avons déjà vu dans la section 2.2 que ce graphe peut être utilisé pour simuler le modèle $L(n,2)$. Le codage d'une configuration est obtenu en plaçant dans chaque sommet i ($i \geq 1$) la différence entre le nombre de grains de la i^e et de la $i+1^e$ colonne. La configuration $\boxed{3}$ pour C correspond donc dans $L(m,2)$ à la configuration $a = 3 \cdot n, 3(n-1), \ldots, 3, 0$. On obtient ainsi le nombre total de grains présents dans le modèle : $m = \sum 3i = 3n(n+1)/2$. Nous allons prouver que a est un élément de $L(m,2)$, c'est-à-dire que a est atteignable à partir de $m, 0, \ldots, 0$. La condition nécessaire pour cela est, d'après le théorème 7.8 :

– $a_i - a_{i+1} \geq 0$
– a ne contient aucune séquence de la forme $k, k, k-1, k-2, \ldots, k-l+1, k-l+1$

La première condition est clairement satisfaite par a, et toute séquence de la forme décrite dans la deuxième condition commence par k, k, et n'apparaît pas dans a.

La configuration $\boxed{2}$ dans c correspond dans $L(m,2)$ à une configuration du type $b = k+2n, k+2(n-1), \ldots, k+2, k$. Comme le nombre total de grains dans le système est toujours égal à m, on obtient $k = n/2$ (on rappelle que n est pair). On montre de la même manière que pour a que b est un élément de $L(m,2)$. a est clairement plus grand que b pour l'ordre de dominance, on en conclut donc que b est atteignable à partir de a.

Ceci montre que $\boxed{2}$ est atteignable à partir de $\boxed{3}$ dans C. □

Nous allons maintenant étudier le nombre d'éboulements qu'il faut à chaque sommet pour passer de la configuration $\boxed{3}$ à la configuration $\boxed{2}$. Pour cela nous allons utiliser la matrice laplacienne du graphe, que nous avons introduite dans la section 2.3.

Cette matrice est de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous rappelons que si v est un vecteur vertical (positif), $w = M.v$ est un vecteur vertical tel que chaque w_i est l'opposé de la variation du nombre de grains dans le sommet i, lorsque chaque sommet est éboulé v_i fois. Dans notre cas, on veut passer de la configuration $(0, 3, 3, \dots, 3, 0)$ à une configuration du type $(x, 2, 2, \dots, 2, y)$, où x et y sont le nombre de grains présents dans les sommets 0 et $n+1$, que l'on ne cherche pas à calculer. On cherche donc un vecteur $v = (0, e_{n,1}, \dots, e_{n,n}, 0)$ tel que $M.v = (-x, 1, 1, \dots, 1, -y)$.

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
2e_{n,1} - e_{n,2} &= 1 \\
-e_{n,1} + 2e_{n,2} - e_{n,3} &= 1 \\
-e_{n,2} + 2e_{n,3} - e_{n,4} &= 1 \\
&\vdots \\
-e_{n,n-2} + 2e_{n,n-1} - e_{n,n} &= 1 \\
-e_{n,n-1} + 2e_{n,n} &= 1
\end{aligned}$$

Ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned}
2e_{n,1} - e_{n,2} &= 1 \\
3e_{n,2} - 2e_{n,3} &= 3 \\
4e_{n,3} - 3e_{n,4} &= 6 \\
&\vdots \\
ne_{n,n-1} - (n-1)e_{n,n} &= n(n-1)/2 \\
-e_{n,n-1} + 2e_{n,n} &= 1
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation de récurrence suivante :

$$e_{n,i} = \frac{i(i+1+2e_{n,i+1})}{2(i+1)} \tag{7.1}$$

$$\tag{7.2}$$

De plus, en combinant les deux dernières équations du système on obtient :

$$e_{n,n} = n/2$$

Théorème 7.11 *La solution de la relation de récurrence 7.1 est :*

$$e_{n,i} = i(n-i+1)/2$$

Preuve : Ceci est vrai pour $e_{n,n}$.

Si on suppose que $e_{n,i+1} = (i+1)(n-i)/2$, alors

$$\begin{aligned}
e_{n,i} &= i(i+1+(i+1)(n-i))/2(i+1) \\
&= i(n-i+1)/2
\end{aligned}$$

□

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 7.12 *Soit C un CFG représentant une colonne de la grille de n cases, avec n pair. Alors on passe de la configuration $\boxed{3}$ à $\boxed{2}$ en éboulant le sommet i $e_{n,i}$ fois, avec $e_{n,i} = i(n-i+1)/2$.*

En pratique, le nombre d'éboulements nécessaires pour le sommet i pour passer de $\boxed{3}$ à $\boxed{2}$ se trouve être exactement le nombre d'éboulements de la case $(i, n/2)$ lors de la relaxation de la configuratin $\boxed{4}$ sur la grille $n \times n$. Prouver cette égalité s'avère difficile, comme nous l'avons évoqué dans la section 3.2. On peut cependant montrer que ce nombre est une borne supérieure pour le nombre d'éboulements réels dans $\boxed{4}$:

Théorème 7.13 *Le nombre de fois qu'une case de la i^{e} ligne sur la grille $2p \times 2p$ s'éboule lors de la relaxation de $\boxed{4}$ est majoré par $e_{2p,i}$.*

Preuve : En partant de la configuration $\boxed{4}$, étudions la configuration u obtenue en éboulant de force chaque case de la i^{e} ligne $e_{2p,i}$ fois.

Comme les nombres $e_{n,i}$ sont invariants par la transformation $i \leftrightarrow n-i$, et que $\boxed{4}$ est symétrique, nous ne considérons que la moitié supérieure de la grille. Il y a quatre types de cases différentes à considérer : les coins, les cases du bord qui sont sur la première ligne, les cases du bord qui ne sont pas sur la première ligne, et les cases qui ne sont pas au bord. Nous allons traiter chaque cas séparément :

coin, $i = j = 1$

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= 4 - 4 \cdot e_{2p,1} + e_{2p,1} + e_{2p,2} \\ &= 4 - 3 \cdot e_{2p,1} + e_{2p,2} \\ &= 4 - 3 \cdot 2p/2 + 2p - 1 = 3 - p. \end{aligned}$$

Ce nombre est plus petit que 4 pour tout $p \geq 1$.

case de la première ligne, $i = 1$ **et** $j \neq 1, 2p$

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= 4 - 4 \cdot a2p, 1 + 2e_{2p,1} + e_{2p,2} \\ &= 4 - 2e_{2p,1} + e_{2p,2} \\ &= 4 - 2p + (2p-1) = 3. \end{aligned}$$

case de la première colonne, $i \neq 1, 2p$ **et** $j = 1$

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= 4 - 4e_{2p,i} + e_{2p,i} + e_{2p,i-1} + e_{2p,i+1} \\ &= 4 - 3e_{2p,i} + e_{2p,i-1} + e_{2p,i+1} \\ &= (8 - 3i(2p-i+1) + (i-1)(2p-i+2) + (i+1)(2p-i))/2 \\ &= (6 - i + i^2 - pi)/2. \end{aligned}$$

$u_{i,j} < 4 \iff i^2 - i - 2pi < 2 \iff i(i-1-2p) < 2$. Comme i est toujours inférieur ou égal à $2p$, cette condition est toujours vérifiée.

case quelconque, $i, j \neq 1, n$

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= 4 - 4e_{2p,i} + 2e_{2p,i} + e_{2p,i-1} + e_{2p,i+1} \\ &= 4 - 2e_{2p,i} + e_{2p,i-1} + e_{2p,i+1} \\ &= (8 - 2i(2p - i + 1) + (i - 1)(2p - i + 2) + (i + 1)(2p - i))/2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

u est donc moins que stable (c'est-à-dire que chaque case contient au plus trois grains) pour tout $p \geq 1$, ce qui d'après le théorème 3.10 donne le résultat. □

Cette majoration est valable en particulier pour les cases des p^{e} et $(p+1)^{\text{e}}$ colonnes. On remarque que $\boxed{4}$ est la plus grande configuration qu'on peut obtenir à partir d'une configuration stable en ajoutant un grain dans chaque case. On a donc le résultat suivant :

Corollaire 7.14 *Lors de la relaxation de la configuration $\bar{1} + \boxed{1}$ sur une grille $2p \times 2p$, pour tout i, la case (i, p) s'éboule au plus $e_{2p,i}$ fois.*

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant :

Lemme 7.15 *Soit C un CFG de support $G = (V, E)$ défini de la façon suivante : $V = \{0, \ldots, n+1\}$, avec n pair, et E est constitué des arcs suivants : $\{(1, 0), (n, n+1)\}$, et $\{(i, i+1), (i+1, i)\}$ pour tout i, $i = 1, \ldots, n-1$. Si la configuration initiale de C est $\boxed{3}$, et que par une suite d'éboulements on obtient une configuration où chaque sommet contient au plus deux grains, alors pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, le i^{e} sommet s'est éboulé au moins $e_{n,i}$ fois.*

Preuve : Il suffit de constater que la configuration correspondante dans $L(m, 2)$ est inférieure à $\boxed{2}$ pour l'ordre de dominance. Cette configuration est donc accessible à partir de $\boxed{2}$ par une suite d'éboulements, et donc on l'atteint à partir de $\boxed{3}$ en éboulant chaque sommet plus souvent que pour atteindre $\boxed{2}$. □

Il suffit donc pour montrer la conjecture de montrer que lors de la relaxation de $\bar{1}^{\downarrow}$ sur la grille $2p \times (2p+1)$, pour tout i la case (i, p) s'éboule au moins $e_{n,i}$ fois. On obtiendrait ainsi que pour tout i la case $(i, p+1)$ s'éboule exactement $e_{n,i}$ fois lors de la relaxation contrôlée de $\bar{1}^{\downarrow}$, ce qui implique que la configuration obtenue après la relaxation contrôlée est $\boxed{2}$.

Cependant ce résultat s'avère difficile à montrer. L'approche que nous avons suivie pour essayer de le prouver est la suivante : nous avons constaté que dans la configuration $\bar{1}$ sur une grille $2p \times 2p$, toutes les cases des p^{e} et $(p+1)^{\text{e}}$ colonnes contiennent trois grains. Quand on considère la configuration $\bar{1}^{\downarrow}$, pour tout i la case $(i, p+1)$ contient donc un grain de moins que ses voisines (i, p) et $(i, p+2)$. À la fin de la relaxation, comme la configuration obtenue est $\boxed{2}$, les cases de ces trois colonnes contiennent exactement le même nombre de grains.

On a également constaté qu'au cours de la relaxation, les valeurs des cases (i, p) et $(i, p+2)$ restent toujours supérieures ou égales à celles des cases $(i, p+1)$.

Conjecture 7.16 *Lors de la relaxation de la configuration* $\bar{1}^{\downarrow} + \boxed{1}$ *sur une grille* $2p \times 2p$*, si à chaque étape on éboule toutes les cases instables, alors pour tout* i*, les cases* (i, p) *et* $(i, p+2)$ *contiennent au moins autant de grains que la case* $(i, p+1)$*.*

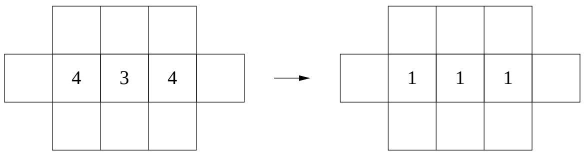
On voit bien que, si ce résultat est vrai, alors on peut démontrer que la configuration $\bar{1}$ sur la grille $2p \times (2p+1)$ est égale à $\bar{1}^{\downarrow}$:

Théorème 7.17 *Si la conjecture 7.16 est vraie, alors la configuration récurrente sur la grille* $2p \times (2p+1)$ *qui est dans la même classe que* $\boxed{1}$ *est égale à* $\bar{1}^{\downarrow}$*.*

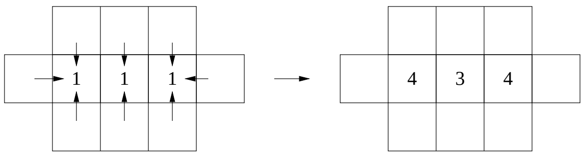
Preuve : À la fin de la relaxation contrôlée de la configuration $\bar{1}^{\downarrow} + \boxed{1}$ sur la grille $2p \times (2p+1)$, nous avons vu que toutes les cases des colonnes p et $p+2$ contiennent exactement deux grains. Si la conjecture 7.16 est vraie, alors les cases de la $(p+1)^{\text{e}}$ colonne contiennent au plus deux grains. D'après le lemme 7.15, ceci montre que pour tout i, la case de la i^{e} ligne s'est éboulée au moins $e_{n,i}$ fois. Or, d'après le corollaire 7.14, cette case ne peut pas s'ébouler plus de $e_{n,i}$ fois. On obtient donc que la case de la i^{e} ligne et de la $(p+1)^{\text{e}}$ colonne s'est éboulée exactement $e_{2p,i}$ fois, et que donc elle contient exactement deux grains.

La configuration obtenue est donc exactement $\boxed{2}$, ce qui signifie d'après le théorème 7.2 que la configuration dont nous sommes partis, $\bar{1}^{\downarrow}$, est égale à $\bar{1}$. □

Nous allons étudier ce qui se passe lors de cette relaxation contrôlée, pour tenter de comprendre à quelles conditions la conjecture 7.16 est vérifiée. À la première étape, toutes les cases des colonnes p et $p+2$ contiennent en pratique quatre grains, et les cases de la $(p+1)^{\text{e}}$ colonne en contiennent par définition trois. Lors de l'éboulement de trois cases voisines sur ces trois colonnes, les cases des colonnes p et $p+2$ perdent trois grains, et celle de la colonne $p+1$ en perd deux :

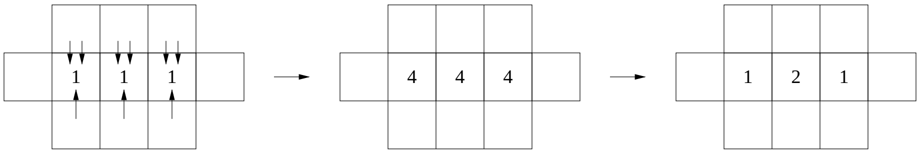


On voit qu'après cette étape, les valeurs des cases des colonnes p et $p+2$ restent supérieures ou égales à celle de la colonne $p+1$. Pour que ces trois cases s'éboulent à nouveau, il faut que les cases des colonnes p et $p+2$ reçoivent trois grains. Ces grains peuvent par exemple venir des trois voisines de ces cases :



Dans ce cas, quand les cases situées au-dessus et au-dessous des cases considérées s'éboulent, la case de la $(p+1)^{\text{e}}$ colonne s'éboule également, et on revient donc dans la configuration de départ (pour ces trois cases), et les valeurs des cases des colonnes p et $p+2$ restent supérieures ou égales à celle de la $(p+1)^{\text{e}}$colonne.

Par contre, rien ne permet de supposer a priori que les grains qui arrivent dans les cases de gauche et de droite vont provenir des trois cases environnantes. On peut également avoir le schéma suivant :



Dans ce cas, on voit alors que la valeur de la case de la $(p+1)^{\text{e}}$ colonne devient supérieure à celle des cases des colonnes p et $p+2$.

La conjecture 7.16 ne peut donc être vraie que si ceci n'arrive pas. Nous nous sommes donc posé la question de savoir de quelles directions proviennent les grains qui arrivent dans les cases de la p^{e} colonne lors de la relaxation.

Nous avons calculé expérimentalement le nombre d'éboulements des sommets de la $(p-1)^{\text{e}}$ colonne lors de la relaxation de $\bar{1}+\boxed{1}$. Nous nous sommes servis des deux constatations suivantes :

- les cases de la p^{e} colonne contiennent toutes trois grains dans $\bar{1}$, et contiennent deux grains après la relaxation
- la case (i,p) s'éboule $e_{2p,i}$ fois lors de la relaxation.

Soit $e_{i,p-1}$ le nombre d'éboulements de la case $(i,p-1)$ lors de la relaxation de $\bar{1}+\boxed{1}$. Lors de la relaxation, la case (i,p) reçoit des grains de ses voisines de gauche, de droite, du dessus et du dessous, et perd $4e_{2p,i}$ grains. Sa valeur finale est 2. On a donc :

$$2 = 3 + e_{2p,i} + e_{2p,i-1} + e_{2p,i+1} + e_{i,p-1} - 4e_{2p,i}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} e_{i,p-1} &= -(4-4e_{n,i}+e_{n,i-1}+e_{n,i+1}+e_{n,i})+2 \\ &= 3e_{n,i}-e_{n,i-1}-e_{n,i+1}-2 \\ &= (3i(n-i+1)-(i-1)(n-i+2)-(i+1)(n-i)-4)/2 \\ &= (3ni-3i^2+3i-ni+i^2-2i+n-i+2-ni+i^2-n+i-4)/2 \\ &= (-2+ni+i-i^2)/2 \\ &= e_{n,i}-1, \text{ pour } i \neq 1. \end{aligned}$$

Pour $i=1$, il vaut :

$$\begin{aligned} e_{1,p-1} &= -(4-4n/2+n/2+e_{n,2})+2 \\ &= -4+2n-n/2-(n-1)+2 \\ &= -1+n/2 = a_{n,1}-1. \end{aligned}$$

On constate donc qu'on a, en pratique :

$$e_{2p,i-1} + e_{2p,i+1} = 2e_{2p,i} - 1 = e_{2p,i} + e_{i,p-1}$$

(pour $i \neq 1$). Ceci signifie que lors de la relaxation, une case de la p^{e} colonne reçoit le même nombre de grains de ses voisines du dessus et du dessous que de ses voisines de gauche et de droite.

Ceci reste vrai pour une case du bord, qui n'a pas de voisine du dessus ou du dessous : $e_{2p,1} = p$, $e_{2p,2} = 2p - 1$, et $e_{1,p-1} = p - 1$. (le cas de la case qui est sur la dernière ligne est symétrique de celui-ci).

Il semble donc que le flot de grains qu'une case reçoit lors de la relaxation provienne uniformément des quatre directions. Il semble de plus que ceci soit une propriété de toutes les configurations récurrentes :

Conjecture 7.18 *Soit u une configuration récurrente symétrique par rapport à l'axe vertical sur une grille $2p \times 2p$. Alors, si l'on ajoute un grain sur chaque case et qu'on relaxe la configuration obtenue, chaque case de la p^e colonne s'éboule au plus une fois de plus que sa voisine de gauche.*

Cette conjecture a été constatée expérimentalement sur un grand nombre de configurations récurrentes, mais nous n'avons trouvé aucune approche pour la résoudre

Il semble donc en conclusion que beaucoup des questions auxquelles nous tentons de répondre reposent sur cette dernière conjecture.

7.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la configuration $\bar{1}$, la configuration récurrente de la classe de $\boxed{1}$. Nous nous sommes attachés en particulier à l'étude d'une conjecture sur la forme comparée de ces configurations sur des grilles de tailles différentes. Nous avons tout d'abord ramené la résolution de cette conjecture dans le cas général à sa résolution dans un cas précis. Nous avons ensuite établi que la résolution de ce cas particulier se ramène au calcul du nombre d'éboulements de certaines cases lors d'une avalanche donnée. Nous avons pour cela utilisé des outils provenant de l'étude de modèles dynamiques discrets similaires au TSA, développés dans une approche semblable à celle que nous avons utilisée dans la deuxième partie.

Enfin, nous avons établi que cette conjecture repose, au moins en partie, sur une conjecture plus large qui concerne les configurations récurrentes en général. Nous avons pu constater que cette deuxième conjecture apparaît dans de nombreux contextes.

Conclusion de la troisième partie

Nous nous sommes attachés dans cette partie à l'étude des configurations récurrentes du modèle du tas de sable abélien.

Dans un premier temps, nous avons étudié la structure de l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe donné. Nous avons montré que cet ensemble est naturellement muni d'une structure d'ordre qui est une union de treillis distributifs.

Nous nous sommes ensuite intéressés à deux configurations récurrentes particulières sur la grille : l'identité et $\bar{1}$, le représentant de la classe de $\boxed{1}$. En étudiant une extension infinie de l'algorithme thermique, qui est utilisé pour calculer ces configurations sur des grilles finies, nous avons conjecturé que l'une de ces configurations sur une grille finie peut être obtenue comme une étape intermédiaire du calcul de cette même configuration sur une grille plus grande. Ceci expliquerait les similitudes constatées entre ces configurations sur des grilles de tailles différentes.

Nous nous sommes ensuite attachés à l'étude de la configuration $\bar{1}$ sur des grilles de taille $2p \times (2p+1)$. Grâce à des techniques issues de l'étude des espaces des configurations des modèles dynamiques discrets, nous avons fait des avancées significatives dans l'étude de cette configuration.

Les travaux que nous avons effectués dans cette partie ne font qu'avancer un peu dans la compréhension de la structure de la configuration remarquable qu'est l'identité. Cependant, ils ouvrent certaines directions prometteuses de recherche.

Nous avons rencontré au cours de nos travaux plusieures configurations remarquables. Nous avons étudié en détail l'identité et la configuration $\bar{1}$, et nous avons également évoqué dans le chapitre 3 la configuration $\bar{4}$, qui est la configuration récurrente de la classe de $\boxed{4}$. Ces configurations partagent des points communs intéressants, comme par exemple leur structure auto-similaire. Une recherche de configurations du même type, ainsi qu'une étude comparée de leurs propriétés, permettrait de mieux comprendre leur structure, et celle de l'identité en particulier.

D'autre part, nous avons vu que l'algorithme thermique, utilisé pour calculer l'identité, se décompose en deux phases. L'étude de la première phase a donné lieu à des observations intéressantes, et à une plus grande compréhension de cette configuration. L'étude de la deuxième phase de l'algorithme donnerait des renseignements complémentaires sur sa structure.

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'étude d'une famille de modèles dynamiques discrets. Les études concernant ces modèles prennent deux directions générales, d'une part l'étude de la structure de l'ensemble des configurations atteignables à partir d'une configuration initiale donnée, et d'autre part l'étude des propriétés algébriques d'un ensemble de configurations particulières, jouant un rôle central pour le modèle.

Nous avons étudié le Chip Firing Game, et donné une nouvelle preuve, plus intuitive, du fait que ce modèle engendre des treillis. Nous avons également développé des outils pour l'étude et la manipulation de ces treillis. Comme le Chip Firing Game est une généralisation de certains autres modèles dynamiques discrets [42], les outils que nous avons développés s'appliquent également à ces modèles. Puis nous avons comparé les classes de treillis engendrés par CFG et par quelques modèles proches, l'Edge Firing Game, le Chip Firing Game sur un graphe en mutation et le modèle du tas de sable abélien. Nous avons montré que toutes ces classes sont strictement comprises entre les treillis distributifs et les treillis SLD.

Nous avons étudié les structures d'ordre qu'on peut associer à l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe. Ceci nous a permis de constater que les outils de la théorie des ordres et des treillis développés pour l'étude des espaces des configurations des modèles dynamiques discrets s'appliquent également à l'étude des configurations récurrentes. Nous avons par exemple montré que l'ensemble des configurations récurrentes d'un graphe est naturellement partitionné en une union de treillis distributifs. Nous avons ensuite étudié une extension infinie de l'algorithme thermique, qui nous a permis de mieux comprendre comment apparaissent certaines propriétés de l'identité du tas de sable, notamment sa structure auto-similaire.

Allant plus loin dans cette direction, nous avons étudié les similitudes existant entre les configurations $\bar{1}$ sur des grilles de différentes taille. Pour cette étude nous avons utilisé des outils provenant de l'étude des configurations récurrentes du modèle, mais également de l'étude des espaces des configurations des modèles dynamiques discrets telle que nous l'avons effectuée dans la deuxième partie de ce mémoire. En réduisant la complexité de cette étude à des cas de plus en plus simples, nous avons isolé une conjecture centrale qui joue un rôle dans de nombreuses questions sur le TSA.

Nous avons vu qu'il existe deux approches a priori différentes concernant les modèles que nous avons étudiés. La première s'occupe de l'étude des configurations récurrentes, c'est-à-dire d'un certain ensemble de configurations stables du modèle. La deuxième s'intéresse plus à l'aspect dynamique des modèles, et étudie l'ensemble des configurations atteignables à partir d'une configuration instable donnée. Nous avons montré dans le chapitre 7 qu'il existe des liens entre ces deux approches. En particulier, nous avons appliqué à l'étude d'une configuration récurrente particulière un résultat de Goles, Morvan et Phan [32], concernant la caractérisation des éléments de l'espace des configurations d'un modèle à base de partitions d'entiers. Nous avons utilisé ce résultat pour étudier la colonne centrale de la grille $2p \times (2p+1)$, et établir à quelles conditions une configuration récurrente particulière est le représentant $\bar{1}$ de la classe de $\boxed{1}$.

Les travaux que nous avons effectués ont plusieurs prolongements naturels.

Les différents modèles que nous avons étudiés engendrent plusieurs classes de treillis. Nous avons vu que certaines de ces classes sont incluses les unes dans les autres, et nous avons obtenu certaines conditions sous lesquelles un treillis ne peut pas appartenir à une de ces classes : par exemple, tous les treillis engendrés par CFG étant rangés, un treillis non rangé ne peut pas être l'espace des configurations d'un CFG. Cependant, aucune caractérisation exacte des différentes classes de treillis n'a encore été donnée.

Le CFG est, pour l'instant, le modèle le plus général parmi tous ceux que nous avons étudiés. Il généralise en particulier la plupart des modèles à base de partitions d'entiers, comme par exemple SPM ou $CFG(n,m)$. Cependant, bien que le modèle de Brylawski soit très proche, par sa définition et par ses propriétés, de SPM, ce n'est pas un cas particulier du CFG. Il paraît donc naturel d'étendre encore le modèle, pour obtenir une généralisation à la fois du CFG et du modèle de Brylawski.

Nous avons étudié dans le chapitre 7 la configuration récurrente $\bar{1}$, qui est la configuration récurrente de la classe de $\boxed{1}$. Nous avons vu que cette configuration a de nombreux aspects communs avec la configuration identité, tout en présentant plus de régularités. Poursuivre l'étude de cette configuration, ou d'autres présentant les mêmes caractéristiques, pourrait permettre de comprendre certaines caractéristiques du modèle.

Le modèle du tas de sable abélien a été initialement étudié pour la propriété que la distribution de la taille des avalanches suit une loi de puissance. Cependant, ceci n'est pas valable pour des grilles de toutes tailles : on sait par exemple que, si la grille est beaucoup plus longue que large, ce n'est pas le cas. Il semble que ce ne soit pas non plus le cas pour des graphes aléatoires. Il serait donc intéressant de déterminer pour quels types de graphes ceci se produit.

Dans un cadre plus large, on peut s'intéresser à certains modèles de diffusion sur des graphes, dans lesquels les sommets sont dans un certain état et, à chaque étape, ajustent leur état en fonction des états de leurs voisins. Le CFG peut être considéré comme un cas particulier de ces modèles, où l'état d'un sommet est le nombre de grains qu'il contient. Ce type de modèle peut également représenter, par exemple, la progression d'une rumeur ou d'une maladie dans un réseau social, ou d'un virus dans un réseau informatique. Il semble que, pour ce type de phénomène, la topologie du réseau joue un rôle important sur la diffusion [54, 52]. Les études que nous avons effectuées peuvent donc être une première étape vers l'étude de ces phénomènes de diffusion, sur des topologies proche des topologies réelles.

Bibliographie

[1] George E. Andrews. *The Theory of Partitions*, volume 2 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[2] P. Bak. *How nature works - The science of SOC*. Oxford university press, 1997.

[3] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality : an explanation of the $1/f$ noise. *Physics Review Letters*, 59(4) :381–384, 1987.

[4] M. Barbut and B. Monjardet. *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*. Hachette, 1970.

[5] Claude Berge. *Principles of Combinatorics*, volume 72 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, 1971.

[6] Karell Bertet. *Sur quelques aspects algorithmiques et structurels des treillis*. PhD thesis, Université Paris VII, 1998.

[7] N. Biggs. Algebraic potential theory on graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 29 :641–682, 1997.

[8] N. Biggs. Chip firing and the critical group of a graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 9 :25–45, 1999.

[9] G. Birkhoff. On the combination of subalgebras. *Proc. Camb. Phil. Soc*, 29 :441–464, 1933.

[10] G. Birkhoff and O. Frink. Representations of lattices by sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 :299–316, 1948.

[11] A. Björner and L. Lovász. Chip-firing games on directed graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1 :304–328, 1992.

[12] A. Björner, L. Lovász, and W. Shor. Chip-firing games on graphs. *European Journal of Combinatorics*, 12 :283–291, 1991.

[13] Y. Le Borgne and D. Rossin. Identité du groupe du tas de sable sur des grilles rectangulaires. In Lacim, 2000.

[14] T. Brylawski. The lattice of integer partitions. *Discrete Mathematics*, 6 :210–219, 1973.

[15] Nathalie Caspard. *Etude structurelle et algorithmique de classes de treillis obtenus par duplications*. PhD thesis, Université Paris I, 1998.

[16] R. Cori and Y. Le Borgne. Sandpile model and tutte polynomials. In *FPSAC01*, 2001.

[17] R. Cori and D. Rossin. On the sandpile group of a graph. *European Journal of Combinatorics*, 21(4) :447–459, 2000.

[18] M. Creutz. Cellular automata and self organized criticality, 1996. Int. conf. on multi-scale phenomena and their simulation," 30/Sept-4/Oct/96, Bielefeld, Germany. Available at `http://xxx.lanl.gov/abs/hep-lat/9611017`.

[19] Arnaud Dartois and Clémence Magnien. Study of the sandpile identity on a lattice. In *Proceedings of the international conference DMCS, Lyon, France*, 2003.

[20] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Orders*. Cambridge university press, 1990.

[21] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Orders*. Cambridge university press, 2002.

[22] J. Desel, E. Kindler, T. Vesper, and R. Walter. A simplified proof of the self-stabilizing protocol : A game of cards. *Information Processing Letters*, 54 :327–328, 1995.

[23] D. Dhar. Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. Rev. Lett.*, 64, 1990.

[24] D. Dhar and S.N. Majumdar. Abelian sandpile model on the Bethe lattice. *Journal of Physics*, A 23 :4333–4350, 1990.

[25] D. Dhar, P. Ruelle, S. Sen, and D. Verma. Algebraic aspects of sandpile models. *Journal of Physics*, A 28 :805–831, 1995.

[26] Kimmo Eriksson. No polynomial bound for the chip firing game on directed graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112 :1203–1205, 1989.

[27] Kimmo Eriksson. *Strongly Convergent Games and Coxeter Groups*. PhD thesis, Kungl Tekniska Hogskolan, Sweden, 1993.

[28] Kimmo Eriksson. Chip firing games on mutating graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 9 :118–128, 1996.

[29] E. Goles and M.A. Kiwi. Games on line graphs and sand piles. *Theoretical Computer Science*, 115 :321–349, 1993.

[30] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. Lattice structure and convergence of a game of cards. 1998. To appear in Annals of Combinatorics.

[31] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. Sand piles and order structure of integer partitions. 1998. To appear in Discrete Applied Mathematics. Preprint available at `http://www.liafa.jussieu.fr/~phan/`.

[32] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. The structure of linear chip firing games and related models. 1998. To appear in Theoretical Computer Science. Preprint available at `http://www.liafa.jussieu.fr/~phan/`.

[33] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. About the dynamics of some systems based on integer partitions and compositions. *Proceedings of FPSAC'00*, 2000. Preprint available at `http://www.liafa.jussieu.fr/~phan/`.

[34] Eric Goles, Matthieu Latapy, Clémence Magnien, Michel Morvan, and Ha Duong Phan. Sandpile models and lattices : a comprehensive survey. *To appear in Theoretical Computer Science*, 2001. Preprint available at `http://www.lix.polytechnique.fr/~magnien/`.

[35] E.V. Ivashkevich and V.V. Priezzhev. Introduction to the sandpile model. *Physica A*, 254 :97–116, 1998.

[36] Henrik Jeldtoft Jensen. *Self-Organised Criticality*. Cambridge university press, 1998.

[37] D. V. Ktitarev, S. Lübeck, P. Grassberger, and V. B. Priezzhev. Scaling of waves in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model. *Physical Review E*, 61 :81–92, 2000.

[38] M. Latapy and C. Magnien. Coding distributive lattices with edge firing games. *Information Processing Letters*, 83 (3) :125–128, 2002. Preprint available at `http://www.lix.polytechnique.fr/~magnien/`.

[39] M. Latapy and H.D. Phan. The lattice of integer partitions and its infinite extension. 1999. To appear in DMTCS, special issue, proceedings of ORDAL'99. Preprint available at `http://www.liafa.jussieu.fr/~latapy/`.

[40] Matthieu Latapy. *Modèles dynamiques discrets et structures ordonnées*. PhD thesis, Université Paris 7, mai 2001.

[41] Matthieu Latapy, Roberto Mantaci, Michel Morvan, and Ha Duong Phan. Structure of some sand piles model. *Theoretical Computer Science*, 262 :525–556, 2001. Preprint available at `http://www.liafa.jussieu.fr/~latapy/`.

[42] Matthieu Latapy and Ha Duong Phan. The lattice structure of chip firing games. *Physica D*, 115 :69–82, 2001. Preprint available at `http://www.liafa.jussieu.fr/~latapy/`.

[43] Clémence Magnien. Classes of lattices induced by chip firing (and sandpile) dynamics. In *Proceedings of the international conference FPSAC'02, Melbourne*, 2002. Poster.

[44] Clémence Magnien. Classes of lattices induced by chip firing (and sandpile) dynamics. 2003. To appear in European Journal of Combinatorics. Preprint available at `http://www.lix.polytechnique.fr/~magnien/publis.html`.

[45] Clémence Magnien, Ha Duong Phan, and Laurent Vuillon. Characterization of lattices induced by (extended) chip firing games. In *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Proceedings of the 1-st international conference Discrete Models : Combinatorics, Computation, and Geometry (DM-CCG'01)*, pages 229–244. MIMD, July 2001. Preprint available at `http://www.lix.polytechnique.fr/~magnien/publis.html/`.

[46] S.N. Majumdar and D. Dhar. Equivalence between the abelian sandpile model and the $q \longrightarrow 0$ limit of the potts model. *Physica A*, 185 :129–145, 1992.

[47] V.M. Malhotra, M.P. Kumar, and S.N. Maheshwari. An $o(|v|^2)$ algorithm for finding maximal flows in networks. *Inform. Process. Letters*, 7 :277–278, 1978.

[48] O. Marguin. *Application de méthodes algébriques à l'étude algorithmique d'automates cellulaires*. PhD thesis, Université Claude Bernard- Lyon 1, 1992.

[49] Criel Merino-López. Chip firing and tutte polynomial. *Annals of Combinatorics*, 3 :253–259, 1997.

[50] C. Moore and M. Nilsson. The computational complexity of sandpiles. *Journal of Statistical Physics*, 96 :205–224, 1999.

[51] K.M. Mosesian. Basable and strongly basable graphs. *Akad. Nauk. Armian SSR Dokl.*, 55 :83–86, 1972.

[52] M. E. J. Newman. The spread of epidemic disease on networks. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.

[53] Lhouari Nourine. Colored posets and upper locally distributive lattices. Technical Report 00060, LIRMM, 2000.

[54] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani. Epidemic spreading in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :3200–3203, 2001.

[55] Thi Ha Duong Phan. *Structures ordonnées et dynamiques de piles de sable*. PhD thesis, Université Paris 7, janvier 1999.

[56] O. Pretzel. On reorienting graphs by pushing down maximal vertices. *Order*, 3 :135–153, 1986.

[57] O. Pretzel. Orientations and reorientations of graphs. *Contemp. Math.*, 57 :103–125, 1986.

[58] Oliver Pretzel. Characterization of simple edge-firing games. *Information Processing Letters*, 84 :235–236, October 2002.

[59] James Propp. Lattice structure of orientations of graphs. 1993. Preprint, available at `http://www.math.wisc.edu/~propp/orient.html`.

[60] James Propp. Generating random elements of finite distributive lattices. *Electronic Journal of Combinatorics*, 4, 1998.

[61] Dominique Rossin. *Étude combinatoire de certaines familles d'automates cellulaires.* PhD thesis, École Polytechnique, 2000.

[62] C. Tang. Self-organised criticality. *OCPA Newsletter*, 1993.

[63] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatics polynomials. *Canad. J. Math.*, 6 :80–91, 1953.

[64] Michel Las Vergnas. Active orders for matroid bases. *European Journal of Combinatorics*, 22 :709–721, 2001.

[65] R. Wille. Subdirect decomposition of concept lattices. *Algebra Universalis*, 17 :275–287, 1983.

Index des définitions