TD3 corrigé : Mots et automates

1 Géneralités sur les mots.

3. On veut prouver $uv = vu \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^*$, $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $u = w^n$ et $v = w^m$.

Le sens $\Leftarrow$ est trivial : si $u = w^n$ et $v = w^m$, alors $uv = w^n w^m = w^{n+m}$ et $vu = w^m w^n = w^{n+m}$, donc $uv = vu$.

Pour le sens $\Rightarrow$ on va procéder par récurrence. Soit $\mathcal{P}(i)$ la propriété que $\forall u, v$ tels que $|u| + |v| \leq i$ et $uv = vu$, on ait $\exists w \in \Sigma^*$, $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $u = w^n$ et $v = w^m$.

Soit u et v tels que $|u| = 1$ et $|v| = 1$, et $vu = uv$. Notons c la première lettre de uv. Comme $|u| = 1$, $c = u$. Par ailleurs $vu = uv$ donc c est la première lettre de vu et donc $c = v$. D'où $u = v$ et $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée avec $w = u$ et $m = n = 1$.

Supposons alors que $\mathcal{P}(i)$ est vérifiée $\forall i < k$ (avec $k > 2$ et prenons u, v tels que $|u| + |v| = k$ et $uv = vu$. Prenons u le plus petit des 2 mots u et v. Alors le préfixe de longueur $|u|$ de vu est le même que le préfixe de longueur $|u|$ de uv, donc u lui-même. Comme le préfixe de longueur $|v|$ de vu (*ie* v lui-même) est plus long que le préfixe de longueur $|u|$, il contient ce dernier, et donc u est un préfixe de v.

Si $|u| = |v|$, alors $u = v$ et $w = u$, $n = m = 1$ permettent de vérifier la propriété. Si $|u| < |v|$, alors v s'écrit $v = uv'$ avec $|v'| > 0$ et $|u| > 0$, et donc $u(uv') = uv = vu = (uv')u$. La restriction de l'égalité $uuv' = uv'u$ aux $|v'u|$ dernières lettres des mots donne $uv' = v'u$. Mais comme $|u| > 0$, $|v'| + |u| = |v| - |u| + |u| < |v| + |u| = k$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à u, v'. Donc $\exists w'$, n' et m' tels que $u = w'^{n'}$ et $v' = w'^{m'}$. D'où $v = w'^{n'+m'}$ et donc la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour u, v avec $w = w'$, $n = n'$ et $m = m' + n'$.

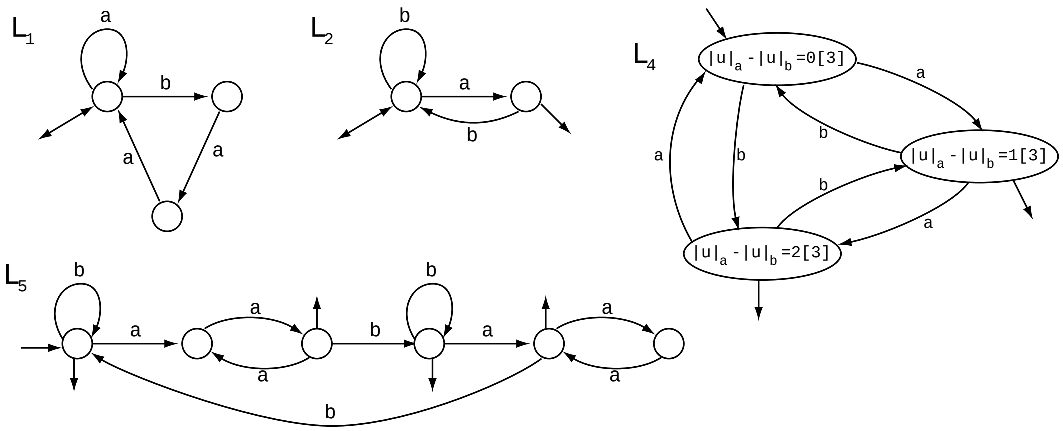
Donc par récurrence $\mathcal{P}(k)$ est vraie $\forall k$; ceci prouve le sens $\Rightarrow$.

2 Reconnaissance de mots et de langages.

L'automate 1 reconnaît les mots qui ont un nombre pair de a. L'automate 2, ceux avec un nombre pair de b. L'automate 3 ceux qui ont un nombre pair de a et de b. Enfin l'automate 4 reconnaît les mots de longueur 2 ou $4 + 6k$, où k est entier.

3 Construction d'automates.

Mis à part le langage L_3 qui est identique à celui de l'exercire précédent, les automates sont les suivants :



4 Automate diviseur

Selon que l'on lise dans un sens ou dans l'autre, les problèmes ne sont pas les mêmes.

L'automate pour les multiples de 5 lus en partant des bits de poids fort se construit de la façon suivante : si $x \equiv k[5]$ alors $x0 \equiv 2k[5]$ et $x1 \equiv 2k+1[5]$. Par exemple si on est dans l'état "3", et qu'on lit un 1, on va dans l'état "7", donc l'etat "2" (car $7 \equiv 2[5]$).

L'automate pour les multiples de 3 (pour 5 c'est similaire mais avec plus d'états) lus en partant des bits de poids faible se construit de façon un peu plus complexe : si $x \equiv k[5]$ alors $1x \equiv k + 2^i[5]$, si x est de longueur i. Il faut donc savoir combien on a déjà lu de bits pour pouvoir faire cette somme correctement. En fait, la seule chose importante est de savoir combien on a lu de bits modulo 3.