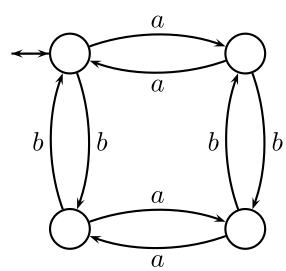
TD6 : Lemme d'Arden, quelques corrections.

Exercice 1 :

Calculer des expressions régulières décrivant les langages reconnus par les automates suivants :



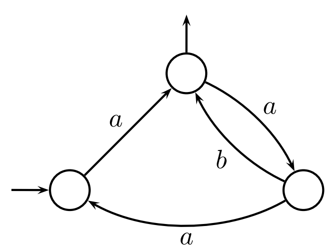
$$\begin{aligned} L_1 &= aL_2 + bL_3 + \epsilon \\ L_2 &= aL_1 + bL_4 \\ L_3 &= bL_1 + aL_4 \\ L_4 &= aL_3 + bL_2 \end{aligned}$$

Donc

$$L_4 = abL_1 + aaL_4 + baL_1 + bbL_4 = (aa + bb)^*(ab + ba)L_1$$

Et

$$\begin{aligned} L_1 &= aaL_1 + abL_4 + bbL_1 + baL_4 + \epsilon \\ &= (aa + bb)L_1 + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)L_1 + \epsilon \\ &= [(aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)]^*\epsilon \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} L_1 &= aL_2 = aaL_3 + a \\ L_2 &= aL_3 + \epsilon \\ L_3 &= aL_1 + bL_2 = aL_1 + baL_3 + b = (ba)^*(b + aL_1) \end{aligned}$$

Donc

$$L_1 = aa(ba)^*(b + aL_1) + a = (aa(ba)^*a)^*(a + aa(ba)^*b)$$

Exercice 2 : encore et toujours le lemme d'itération

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Démontrer que les langages suivants ne sont pas reconnaissables :

- $L_1 = \{a^n b^p \ : \ n, p \geqslant 0 \text{ et } n \neq p\}$.

  Supposons que L_1 est reconnaissable.
  Alors il existe un entier N donné par le Lemme de l'Etoile.
  Considérons le mot $u = a^{N+N!}.b^N.\epsilon$ qui appartient au langage L_1. On va appliquer le lemme de l'étoile au facteur b^N (qui est bien de longueur supérieure à N.
  Considérons une décomposition quelconque de $b^N = v_1 v_2 v_3$ (vérifiant $|v_2| > 0$, alors d'après le lemme de l'étoile, tous les mots $a^{N+N!}.v_1 v_2^i v_3.\epsilon$ sont dans L_1. Donc $N + N! \neq N + |v_2| \cdot i$. Or pour $i = \frac{N!}{|v_2|}$ (qui est entier car $|v_2| \leq N$) cette inégalité n'est pas vérifiée. Donc le mot $a^{N+N!}.v_1 v_2^i v_3.\epsilon$ n'est pas toujours dans L_1, ce qui contredit le fait que L_1 est reconnaissable.

- $L_2 = \{u \in \Sigma^* \ : \ \exists v \ \ u = v\tilde{v}\}$, où $\tilde{v}$ est le mot miroir de v.

  Supposons que L_2 est reconnaissable.
  Alors il existe un entier N donné par le Lemme de l'Etoile.
  Considérons le mot $u = \epsilon.a^n.bba^n$ qui appartient au langage L_2. On va appliquer le lemme de l'étoile au facteur a^N (qui est bien de longueur supérieure à N.
  Considérons une décomposition quelconque de $a^N = v_1 v_2 v_3$ (vérifiant $|v_2| > 0$, alors d'après le lemme de l'étoile, tous les mots $\epsilon.v_1 v_2^i v_3.bba^n$ sont dans L_2. Or pour i suffisamment grand (en fait dès que $i > 1$), on obtient des mots de la forme $a^n bba^m$ avec $n > m$ qui n'appartiennent pas au langage (de manière triviale), ce qui contredit le fait que L_2 est reconnaissable.

- $L_3 = \{a^p \ : \ p \text{ premier } \}$.

  Supposons que L_3 est reconnaissable.
  Alors il existe un entier N donné par le Lemme de l'Etoile.
  Considérons le mot $u = \epsilon.a^M.\epsilon$, où M est un nombre premier supérieur à N. u appartient au langage L_3. On va appliquer le lemme de l'étoile au facteur a^M (qui est bien de longueur supérieure à N.
  Considérons une décomposition quelconque de $a^M = v_1 v_2 v_3$ (vérifiant $|v_2| > 0$, alors d'après le lemme de l'étoile, tous les mots $\epsilon.v_1 v_2^i v_3.epsilon = a^{M+i\cdot|v_2|}$ sont dans L_3. Or pour $i = M$, on obtient le mot $a^{M+M\cdot|v_2|} = a^{M\cdot(1+|v_2|}$. Comme $|v_2| > 0$, l'exposant n'est clairement pas premier, et par conséquent le mot n'est pas dans le langage, ce qui contredit le fait que L_1 est reconnaissable.