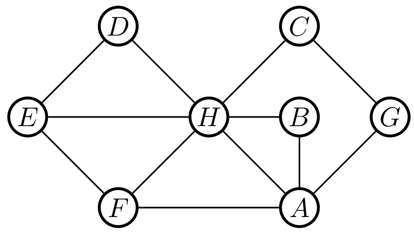
Algorithmique : TD 9
Licence M/I - 29 novembre 2004

1 Coloration de graphe

On veut colorer un graphe, c'est-à-dire attribuer à chaque sommet une couleur (représentée par un entier) de sorte que chaque sommet ait une couleur différente de ses voisins. On propose l'algorithme qui consiste à parcourir le graphe en largeur et pour chaque sommet à colorier, on attribue le plus petit entier possible qui n'est pas encore pris par un de ses voisins.

Exercice 1: On considère le graphe G suivant et on suppose que les voisins d'un nœud sont rangés par ordre alphabétique. Dessiner l'arborescence correspondant à un parcours en largeur de G à partir de A.



Exercice 2: Donner la coloration de G obtenue par l'algorithme précédent.

Exercice 3: Montrer qu'on utilise deux couleurs si et seulement si le graphe est bipartite (c'est-à-dire qu'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux classes telle que deux sommets voisins sont dans des classes différentes).

Exercice 4: Donner un exemple pour lequel l'algorithme n'est pas optimal, c'est-à-dire qu'il utilise plus de couleurs que nécessaire.

2 Parcours Eulérien

Exercice 5: Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes connectées au sommet. Construire un graphe ayant exactement trois sommets de degré 3 et quatre sommets de degré 2.

Un parcours *eulérien* d'un graphe (non orienté) connexe est un chemin qui contient une et une seule fois chaque arête du graphe.

Exercice 6: Montrer que s'il existe un parcours eulérien d'un graphe connexe $\mathcal{G}$, alors le nombre de sommets de $\mathcal{G}$ de degré impair est au plus égal à 2.

On suppose maintenant que $\mathcal{G}$ est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. On procède au parcours suivant : on part d'un sommet s et, s'il existe une arête de s qui n'a pas encore été empruntée, on l'emprunte et on recommence dans le sommet suivant. On s'arrête quand toutes les arêtes ont été empruntées.

Exercice 7: Montrer que ce parcours est un circuit (il commence et termine au même endroit).

Exercice 8: Montrer que si ce circuit n'est pas eulérien, le degré restant de tous les sommets est pair. En déduire un moyen de prolonger le circuit en un circuit eulérien plus grand.

Exercice 9: En déduire un algorithme permettant de construire le parcours eulérien d'un graphe connexe (ayant 0 ou 2 sommets de degré impair).