кие («гармоничная жизнь») и экономические («реализация творческих замыслов») ценности. Можно предположить, что стремление к внутренней согласованности, сбалансированности жизни, семейным ценностям и творчеству, являются гармонизирующими устремлениями личности с высоким уровнем эмоционального выгорания. Таким образом, выбор определенных ценностей может иметь для «выгорающей» личности компенсаторный характер.

Материалы исследования могут быть полезными для профессионального отбора спасателей и организации психологического сопровождения сотрудников МЧС с целью профилактики (коррекции) синдрома эмоционального выгорания.

УДК 519.1

Нурлигареев Хайдар Джамилевич
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
haidar_nur@yahoo.com

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ МАТЕМАТИКОЙ В СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ШКОЛАХ

Настоящая статья посвящена избранным вопросам дискретной геометрии, излагаемым на факультативных занятиях в математических классах. Рассматриваются окружности и правильные и полуправильные многоугольники на клетчатой бумаге, классифицируются правильные паркеты и полуправильные многоугольники на них. Теоретическая часть сопровождается предлагаемыми школьникам задачами.

Ключевые слова: *Клетчатая бумага, полуправильный многоугольник, правильный паркет.*

Эта статья основана на курсе из двух лекций, прочитанных автором в ходе работы летней школы «Современная Математика» для школьников старших классов и студентов младших курсов в июле 2010 года в Дубне. Она включает в себя как темы, традиционно излагаемые на факультативных занятиях в школе имени А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ, так и темы, которые обычно остаются за рамками специального курса.

Первую лекцию мы начали с исследования возможности расположения на клетчатой бумаге окружностей [2], а также правильных и полуправильных многоугольников [1; 3]. Далее проводилась классификация правильных паркетов [4; 5], после чего стало возможным рассмотреть некоторые обобщения вопросов первой части лекции с клетчатой бумаги на паркеты. Именно, в ходе занятий обсуждалось, какие правильные и полуправильные многоугольники можно расположить на каждом из правильных паркетов [6]. Все эти темы нашли своё отражение в данной статье.

На второй лекции мы перешли от паркетов к мозаикам. Были рассмотрены примеры периодических и непериодических мозаик, а также предложены различные способы «конструирования» непериодических мозаик на плоскости. В частности, обсуждались знаменитые мозаики Пенроуза и гипотеза Конвея. В завершение мы познакомились с наиболее современными результатами, в данной области: теоремой Вире и теоремой Долбилина (без доказательства). Материалы второй лекции в статью не вошли.

Задачи на клетчатой бумаге

Клетчатая бумага, под которой здесь и далее мы будем подразумевать множество всех точек плоскости, обе координаты которых являются целочисленными, представляет собой своеобразный мост с интенсивным двусторонним движением. Этот мост даёт возможность при решении чисто геометрических задач воспользоваться методами алгебры, теории чисел и математического анализа, и наоборот, задачи аналитического характера позволяет переводить на геометрический язык. Кроме того, клетчатая бумага является объектом, привычным и понятным любому школьнику. Поэтому она играет столь важную роль в наших изысканиях с методической точки зрения.

Сперва мы рассмотрели следующие два вопроса.

Вопрос 1. Верно ли, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ найдётся круг на плоскости, содержащий внутри себя ровно n узлов клетчатой бумаги?

Вопрос 2. Верно ли, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ на плоскости найдётся окружность, проходящая ровно через n узлов клетчатой бумаги?

Первый вопрос представляет собой несложное упражнение; ответ на него положительный. Рассмотрение второго вопроса полезно предварить следующей леммой из области делимости целых чисел.

Лемма 1. Для каждого целого неотрицательного k уравнение $x^2+y^2=5^k$ имеет ровно $4(k+1)$ различных целочисленных решений.

Для доказательства леммы 1 индукцией мы убеждаемся, что уравнение $x^2+y^2=5^k$ имеет ровно восемь таких решений (x,y), что x и y не делятся на 5. Они дают нужное количество решений вместе с теми $4(k-1)$ корнями, которые имеют вид $(5a,5b)$, где $a^2+b^2=5^{k-2}$.

Из леммы сразу вытекает ответ на второй вопрос для натурального n, кратного четырём. Она же используется, чтобы показать, что для чётных n

подходит окружность с центром в точке (1/2,0) радиуса $\frac{5^{(k-1)/2}}{2}$, а для нечётных – окружность с центром (1/3,0) радиуса $\frac{5^k}{3}$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для любого натурального *n* существует окружность, проходящая ровно через *n* узлов клетчатой бумаги.

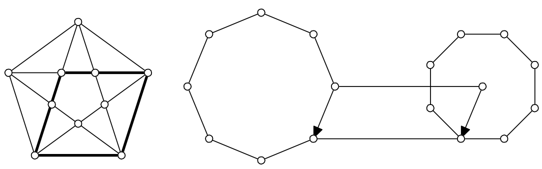
Следующий вопрос, подлежащий рассмотрению, касается многоугольников.

Вопрос 3. Для каких натуральных *n* на клетчатой бумаге можно расположить правильный *n*-угольник?

Мы начали изучение данного вопроса со случая *n=3*. Это логично сделать, во-первых, потому что он не слишком сложен, а во-вторых, потому что оба рассмотренных нами доказательства того, что правильный треугольник не может лежать на клетчатой бумаге, обобщаются на более сложные задачи. Согласно одному из них мы предполагаем, что правильные треугольники, лежащие на клетчатой бумаге, существуют, и выбираем среди них такой, длина стороны которого является наименьшей. Затем выписываем в координатах условие равенства сторон и, рассматривая делимость на два и четыре, приводим его к противоречию.

Второе доказательство использует тригонометрию. Предполагая, что правильный треугольник лежит на клетчатой бумаге, мы рассматриваем один из его углов. С одной стороны, тангенс этого угла равен $\sqrt{3}$. С другой стороны, выражая его через координаты вершин треугольника, нетрудно убедиться, что этот тангенс рационален. Противоречие.

Случай *n=4* очевиден, а случай *n=6* легко вытекает из случая *n=3*. Сложнее разобраться с правильными *n*-угольниками при *n=5* и *n>6*. То, что ни один из них также не лежит на клетчатой бумаге, доказывается при помощи принципа крайнего с использованием правила параллелограмма. Рассуждая от противного, мы на основе имеющегося изготавливаем правильный *n*-угольник, длина стороны которого меньше, чем у исходного, чего быть не может (см. рис.).



Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Плоский правильный *n*-угольник нельзя расположить на клетчатой бумаге при $n \neq 4$.

Формулировка вопроса 3 естественным образом продолжается на классы равносторонних многоугольников (у которых все стороны равны) и равноугольных многоугольников (у которых все углы равны).

Вопрос 4. Для каких натуральных *n* на клетчатой бумаге можно расположить равносторонний *n*-угольник?

Вопрос 5. Для каких натуральных *n* на клетчатой бумаге можно расположить равноугольный *n*-угольник?

Ответ на вопрос 4 даёт нижеследующее утверждение.

Теорема 4. Для любого чётного *n*, большего двух, существует равносторонний *n*-угольник, лежащий на клетчатой бумаге. Ни один равносторонний многоугольник с нечётным количеством вершин расположить на клетчатой бумаге нельзя.

Доказывая теорему 4 для чётных *n,* мы приводим пример, конструируя его на основе квадрата и равностороннего шестиугольника (отметим, что построенный таким образом многоугольник получается невыпуклым). Для нечётных *n* рассуждаем от противного с применением принципа крайнего: предполагая существование искомого многоугольника, записываем в координатах условие равенства его сторон и приводим его к противоречию с предположением, рассматривая делимость на два и четыре.

Изучить равноугольные многоугольники сложнее. Здесь всё зависит от величины $x = tg\frac{2\pi}{n}$ – как и выше, она не должна быть иррациональной. Оказывается, это возможно только при *n = 1, 2, 4, 8*. Чтобы убедиться в этом, мы выражаем при помощи формул Муавра и бинома Ньютона $tg(n\alpha)$ через *tgα*, после чего, подставляя $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ и приравнивая $tg(n\alpha)$ к нулю, получаем уравнение относительно величины $x = tg\frac{2\pi}{n}$. Для нечётных простых *n* это уравнение не может иметь никаких решений, кроме $x = \pm 1$, которые не годятся. Не может оно иметь решений и при составных *n*, имеющих нечётный простой делитель, поскольку $tg(n\alpha)$ представляется в виде отношения двух многочленов от *tgα* с целыми коэффициентами. Остаётся последняя возможность: $n=2^k$. Здесь прямым вычислением можно убедиться, что $tg\frac{2\pi}{16} = \sqrt{2} - 1$, то есть *k>3* тоже не подходят. Учитывая, что квадрат и равноугольный восьмиугольник расположить на клетчатой бумаге можно, мы получаем следующий результат.

Теорема 5. Среди всех возможных равноугольных многоугольников на клетчатой бумаге могут быть расположены только прямоугольник и восьмиугольник.

Правильные паркеты

Клетчатая бумага представляет собой частный случай замощения плоскости правильными многоугольниками без пробелов и наложений, при котором любые два многоугольника пересекаются либо по вершине, либо по стороне, либо не пересекаются вовсе. Каждое такое замощение называется *паркетом*. Паркет называется *правильным*, если для любых двух узлов паркета найдётся движение, которое переводит первый узел во второй и относительно которого паркет инвариантен. Правильные многоугольники, составляющие паркет, мы будем называть *плитками*, а их вершины – *узлами* паркета.

Каждый узел паркета характеризуется множеством плиток, прилегающих к этому узлу, и порядком, в котором они встречаются при обходе данного узла против часовой стрелки. Этот порядок можно записать в виде последовательности чисел, отвечающих количеству сторон соответствующих плиток, которая называется *типом* данного узла. Ясно, что в каждом правильном паркете все вершины имеют одинаковый тип (который называется *типом правильного паркета*), и что любой правильный паркет определяется типом своих вершин.

Число различных правильных паркетов (с точностью до движений и гомотетии) конечно. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Существует ровно 11 типов правильных паркетов: *(6)3; (4)4; (3)6; 3,12,12; 4,8,8; 3,6,3,6; (4)3,6; 3,4,6,4; (3)3,(2)4; (2)3,4,3,4; 4,6,12*.

Доказательство теоремы 6 объёмно, но не представляет сложности в идейном плане. Ясно, что в - каждом узле правильного паркета может сходиться от трёх до шести плиток. Для каждого из этих случаев мы записываем условие того, что сумма прилегающих к данному узлу углов плиток равна 2р. Получается набор уравнений в целых числах, каждое из которых решается несложным перебором. Остаётся проверить, какие из найденных решений соответствуют правильным паркетам, а какие – нет.

Вопросы 3, 4 и 5 естественным образом переформулируются для правильных паркетов, превращаясь в хорошие исследовательские задачи для школьников. Наиболее просто доказывается результат, касающийся равносторонних многоугольников.

Теорема 7. На паркетах *(4)4* и *4,8,8* равносторонний n-угольник может лежать тогда и только тогда, когда n чётно ($n>2$). На каждом из остальных паркетов можно расположить равносторонний многоугольник с произвольным числом сторон.

Для доказательства теоремы 7 достаточно предъявить способ построения искомых многоугольников, что не представляет особого труда, а также провести рассуждения при рассмотрении многоугольников с нечётным числом вершин на паркетах *(4)4* и *4,8,8* (что делается точно так же, как и при доказательстве теоремы 4).

Изучение равноугольных многоугольников на правильных паркетах более трудоёмко. Вводя удачную систему координат, можно увидеть, что если равноугольный n-угольник лежит на данном паркете, то $tg\frac{2\pi}{n}$ должен иметь вид p, $q\sqrt{3}$, $p+q\sqrt{2}$ или $p+q\sqrt{3}$ (в зависимости от паркета), где p и q – рациональные числа. Методом, аналогичным рассмотренному выше, устанавливается справедливость следующей леммы.

<u>Лемма 8.</u> Пусть число n натурально. Тогда если $tg\frac{2\pi}{n}$ имеет вид p, $q\sqrt{3}$, $p+q\sqrt{2}$ или $p+q\sqrt{3}$ (в зависимости от паркета), где p и q – рациональные числа, то n не может принимать значения, отличные от перечисленных в таблице 1.

Используя лемму 8, можно доказать следующую теорему.

Теорема 9. На каждом из 11-ти правильных паркетов можно расположить некоторый равноугольный n-угольник тогда и только тогда, когда n принимает одно из значений, указанных в таблице 2.

Все равноугольные многоугольники, соответствующие указанным в таблице значениям, легко строятся. То, что при других значениях n никакой равноугольный n-угольник разместить на паркете нельзя, вытекает из леммы 8. Исключение составляет паркет *(3)3,(2)4*: на нём оказывается невозможным расположить также равноугольные *12*-угольник и *24*-угольник, хотя это никак не противоречит лемме 8. Для доказательства отмеченного факта приходится задействовать более сложные методы, которые здесь мы рассматривать не будем.

Задачи к курсу

Задача 1. Пусть $N(O,R)$ – число точек с целыми координатами, лежащих внутри круга радиуса R

Таблица 1

Вид	p	$q\sqrt{3}$	$p+q\sqrt{2}$	$p+q\sqrt{3}$
n	*1, 2, 4, 8*	*1, 2, 3, 4, 6, 12*	*1, 2, 4, 8, 16*	*1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24*

Таблица 2

Тип паркета	*(4)4*	*4,8,8*	*(3)3,(2)4*	*(6)3; 3,6,3,6; (3)6; (4)3,6*	*3,12,12; 3,4,6,4; 4,6,12; (2)3,4,3,4;*
Число n	*4, 8*	*4, 8, 16*	*3, 4, 6, 8*	*3, 4, 6, 12*	*3, 4, 6, 8, 12, 24*

с центром в точке O. Докажите, что $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{N(O,R)}{R^2}=\pi$.

Задача 2. Докажите, что на клетчатой бумаге можно расположить выпуклый равносторонний многоугольник с любым чётным числом сторон.

Задача 3. Пусть $(x-x_0)^2+y^2=R^2$ – окружность, проходящая ровно через n узлов решётки $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что на сфере $(x-x_0)^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2=R^2+2$ лежат ровно n узлов решётки $\mathbb{Z}^3$.

Задача 4. Докажите, что плоский правильный n-угольник можно расположить на решётке $\mathbb{Z}^3$ тогда и только тогда, когда $n=3$, $n=4$ или $n=6$.

Задача 5. Для каких $n\in\mathbb{N}$ на решётке $\mathbb{Z}^3$ можно расположить

а) замкнутую ломаную из n звеньев одинаковой длины;

б) замкнутую равноугольную ломаную из n звеньев?

Задача 6. Докажите, что для каждого натурального n существует окружность, проходящая ровно через n узлов паркета типа: а) *(6)3*; б) *(3)6*.

Задача 7. Для каждого из правильных паркетов перечислите все натуральные значения n, при которых на этом паркете можно расположить некоторый правильный n-угольник.

Библиографический список

1. *Вавилов В.В., Устинов А.В.* Многоугольники на решётках. – М.: МЦНМО, 2006.

2. *Вавилов В.В., Устинов А.В.* Окружности на решётках // Квант. – 2006. – № 6. – С. 10–14.

3. *Вавилов В.В., Устинов А.В.* Полуправильные многоугольники на решётках // Квант. – 2007. – № 6. – С. 13–15.

4. *Колмогоров А.Н.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант. – 1986. – № 8. – С. 3–7.

5. *Михайлов О.* Одиннадцать правильных паркетов // Квант. – 1979. – № 2. – С. 9–14.

6. *Нурлигареев Х.Д.* Равноугольные многоугольники на правильных паркетах // Математическое образование. – 2011. – № 2 (58). – С. 39–63.

УДК 37.015

Паклина Ольга Валентиновна

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Паклин Дмитрий Борисович

Ярославский филиал Военно-космической академии им. А.Ф.Можайского

uncollege@yandex.ru

МОДЕРНИЗАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЕВРОПЕ И ТЕНДЕНЦИИ ЕГО РАЗВИТИЯ В РОССИИ

Требования развития образования, в соответствии с европейскими нормами привели многие страны к глубоким реформам системы образования, модернизации профессионального образования через введение непрерывного многоуровневого образования, провозглашение компетентностного подхода, тотальную информатизацию. В каждой стране процесс развития теории и практики непрерывного образования имеет свои специфические черты, но в то же время выявляются и их общие принципы.

Ключевые слова: *современная система профессионального образования и обучения, философия образования, преемственность содержания образования, единые европейские образовательные стандарты и квалификации, продолжительность и уровень образования, основные образовательные модели, непрерывное образование, профессиональные компетенции.*

В современных условиях стало очевидным, что назрела проблема комплексной структурной перестройки образовательной системы в целом и системы профессионального образования в частности. Сегодня необходимо сохранить сильные стороны российской образовательной системы, сделать ее гибкой и адаптивной, чтобы в новых экономических условиях она сохраняла свою роль как одного из ведущих факторов общественного развития с учетом интересов общества и отдельно взятой личности.

В Приоритетных направлениях развития образовательной системы РФ, одобренных Правительством РФ в декабре 2004 года, поставлена задача реструктуризации систем профессионального образования. Необходимость решения этой задачи определена: положениями Концепции модернизации российского образования в период до 2010 г., положениями Федеральной целевой программы развития образования на 2011–2015 гг., Копенгагенским и Болонским процессами, удовлетворением запросов экономики, обеспечением доступности, качества и эффективности начального и среднего профессионального образования, созданием многоуровневых учреждений профессионального образования.

Стратегической целью модернизации профессионального образования в современном мире является создание принципиально новой системы образования – непрерывной, главной идеей и целью которой является постоянное развитие личности в течение всей жизни в интересах человека и общества.