О многолистных правильных паркетах

Х. Д. Нурлигареев

Если примыкающие к точке правильные многоугольники с одинаковой длиной сторон не укладываются в однослойный правильный паркет, может случиться, что они образуют многослойный (или *многолистный*) правильный паркет. В статье изучены возможные случаи существования многолистных правильных паркетов и исследован вопрос, когда такие паркеты оказываются *конечнолистными*, т.е. состоят из конечного числа слоев.

1. Постановка задачи

Исходная задача заключалась в классификации правильных паркетов, см. [2, 3]. Поскольку каждый правильный паркет определяется типом своих вершин, для классификации достаточно найти все возможные типы вершин, а потом для каждого найденного типа определить, существует ли правильный паркет, соответствующий этому типу. Под “возможным типом вершины” мы подразумеваем последовательность правильных многоугольников со сторонами одной и той же длины, которые можно расположить на плоскости так, чтобы все они пересекались по одной вершине, а любые два соседних пересекались по стороне (при этом два многоугольника, не являющиеся соседними, будут пересекаться по вершине, а первый и последний многоугольники мы считаем соседними). Соответствующее расположение этих многоугольников на плоскости мы назовём *ростком.*

В ходе решения исходной задачи некоторые возможные типы вершин приходилось исключать из рассмотрения, поскольку соответствующие им ростки не продолжались до правильного паркета. Так получалось потому, что рассматривая движения, переводящие центр данного ростка в другие вершины многоугольников, мы получали накладывающиеся друг на друга плитки. Поэтому возник следующий вопрос: а что будет, если мы разрешим плиткам перекрываться? Вообще говоря, у нас получится *многолистный* паркет. Будет ли он *конечнолистным*? И если да, то каково количество слоев?

Ответам на эти вопросы и посвящена настоящая работа.

2. Возможные типы вершин

Перечислим все возможные типы вершин, ростки которых не продолжаются до правильных паркетов.

В каждой вершине ростка может сходиться три, четыре, пять или шесть правильных многоугольников. Если их шесть, то все они — треугольники (и росток продолжается до треугольного паркета). Если их пять, то либо это шестиугольник и четыре треугольника, либо два квадрата и три треугольника (причём в последнем случае у нас может быть два типа вершины в зависимости от того, в каком порядке мы эти квадраты и треугольники расположим). Все три ростка, соответствующие этим типам вершин, достраиваются до правильных паркетов.

Рассмотрим теперь две оставшиеся возможности. Допустим, к вершине ростка A примыкает четыре многоугольника, количество вершин которых равно k, l, m и n соответственно. Тогда, записывая условия того, что сумма примыкающих к А углов равна развернутому, мы имеем равенство:

$$\frac{(k-2)\pi}{k}+\frac{(l-2)\pi}{l}+\frac{(m-2)\pi}{m}+\frac{(n-2)\pi}{n}=2\pi$$

Преобразования приводят нас к следующему уравнению:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$$

Считая без ограничения общности, что $k \leq l \leq m \leq n$, мы видим, что либо $k = 3$, либо $k = 4$ (потому что при $k \geq 5$ сумма дробей в левой части меньше единицы). Во втором случае решение единственно: $k = l = m = n = 4$; оно приводит нас к паркету ((4)4). А первый случай сводится к уравнению

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

Здесь снова есть две возможности: $l = 3$ и $l = 4$. Рассматривая их аналогичным способом, мы видим, что они дают решения $(k, l, m, n) \in \{(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6)\}$. Из этих решений два ростка ((3,6,3,6) и (3,4,6,4)) достраиваются до правильного паркета, а остальные четыре — нет.

Осталось исследовать тип вершины, в которой сходится три многоугольника. Снова считаем, что количество их вершин равно k, m и n соответственно, причём $k \leq m \leq n$. В этом случае условие для суммы углов плиток, сходящихся в A, принимает вид

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi$$

или

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Очевидно, $k \leq 6$. Осталось рассмотреть четыре возможные значения.

Если $k = 6$, то единственное возможное решение $m = 6$, $n = 6$. Оно даёт нам правильный шестиугольный паркет.

Если $k = 5$, то единственное возможное решение $m = 5$, $n = 10$. Соответствующий росток до паркета не достраивается.

Если $k = 5$, то $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$. Здесь имеется целых три решения — (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), два последних из которых соответствуют правильным паркетам.

Наконец, если $k = 3$, то $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$. Тут решений целых пять: (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12). И лишь одно из них (последнее) приводит нас к правильному паркету.

Таким образом, подлежат дальнейшему исследованию десять следующих типов вершин, ростки которых не достраиваются до правильных паркетов: (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (4, 5, 20), (5, 5, 10), (3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6).

3. Кристаллографические леммы

Рассмотрим некоторое дискретное множество точек V на плоскости, которое удовлетворяет следующему условию: для любых двух элементов a, $b \in V$ существует такое движение g плоскости, которое переводит a в b, оставляя при этом V неподвижным. Пусть G — группа всех движений, V инвариантно. Тогда справедлив следующий результат, см. [1], гл. 4.

Лемма 1. *Если $g \in G$ — вращение, то его порядок не может принимать значения, отличные от* $2, 3, 4, 6$.

Доказательство. Пусть P — произвольный центр вращения порядка n. Рассмотрим его орбиту при действии группы G. Поскольку множество V дискретно, то найдётся точка Q орбиты, самая близкая к точке P. Очевидно, она тоже будет центром вращения порядка n.

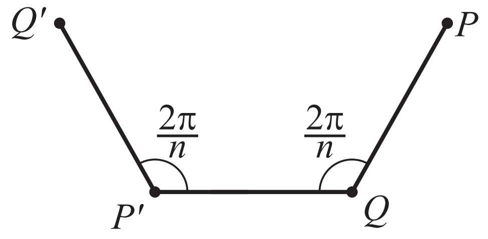

Рис. 1

Пусть P' — образ точки P при вращении вокруг Q на угол $\frac{2\pi}{n}$, а Q' — образ точки Q при вращении вокруг P' на тот же самый угол. Ясно, что $PQ = QP' = P'Q'$. Вполне возможно, точки Q' и P совпадают. Тогда $n = 6$. Во всех остальных случаях, в силу выбора точки Q, должны быть выполнены неравенства $PP' \geq PQ$ и $PQ' \geq PQ$. Отсюда следует, что $n < 5$. Действительно, если $n = 5$, то

$$PQ' = \left(1 - 2\cos\frac{2\pi}{5}\right) \cdot PQ < PQ.$$

Если же $n > 6$, то

$$PP' = 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot PQ < PQ.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 2. *Если правильный n-угольник является базисной плиткой правильного конечнолистного паркета, причём в тип паркета число n входит только один раз, то* $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.

Доказательство. Пусть базисной плиткой некоторого правильного конечнолистного паркета является многоугольник $A_1A_2...A_n$, причём в тип паркета число n входит только один раз.

Рассмотрим преобразование g паркета, которое переводит A_1 в A_2. Это либо поворот на угол $\frac{2\pi}{n}$ с центром в центре многоугольника $A_1A_2...A_n$, либо симметрия относительно срединного перпендикуляра к стороне A_1A_2. В первом случае, поскольку множество всех вершин правильного конечнолистного паркета дискретно, из леммы 1 следует, что $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. Во втором случае рассмотрим также преобразование h, которое переводит A_2 в A_3. Если это поворот, то снова можно воспользоваться леммой 1. Если же h — симметрия, то поворотом на угол $\frac{4\pi}{n}$ является композиция $h \circ g$. Таким образом, всё из той же леммы 1 можно сделать вывод, что $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$. Непосредственно из леммы 2 вытекает следующий результат.

Следствие. Правильные многолистные паркеты с типами вершин (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (4,5,20), (5,5,10) не являются конечнолистными.

Итак, из десяти правильных многолистных паркетов шесть оказались бесконечполистными. Осталось изучить четыре паркета, типы которых есть (3,3,4,12), (3,4,3,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6). Для того, чтобы выяснить, какие из них являются конечнолистными, исследуем каждый из них по отдельности.

4. Паркет типа (3,3,4,12)

Рассмотрим какой-нибудь росток паркета (3,3,4,12) и посмотрим, как выглядят окрестности базисных плиток, если мы начнём строить паркет из этого ростка. Дня того, чтобы построить такую окрестность, будем двигаться от данной вершины по рёбрам фиксированной базисной плитки от вершины к вершине, симметрично отражая многоугольники, сходящиеся в вершине, относительно срединного перпендикуляра к ребру. На рис. 2 показан один шаг такого движения. Исходная вершина отмечена чёрным, следующая по ходу движения — белым. Ось, относительно которой мы отражаем, изображена пунктиром, исходные плитки закрашены светло-серым, новые — темно-серым.

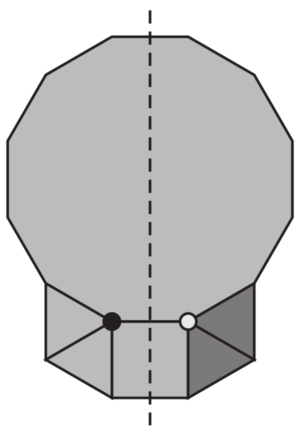

Рис. 2

Рис. 3 иллюстрирует получающиеся окрестности. Вершины базисной плитки, через которые мы проходим, дополнительно выделены. Разными типами линий — сплошной, штриховой, пунктирной — обозначены границы накладывающихся друг па друга многоугольников.

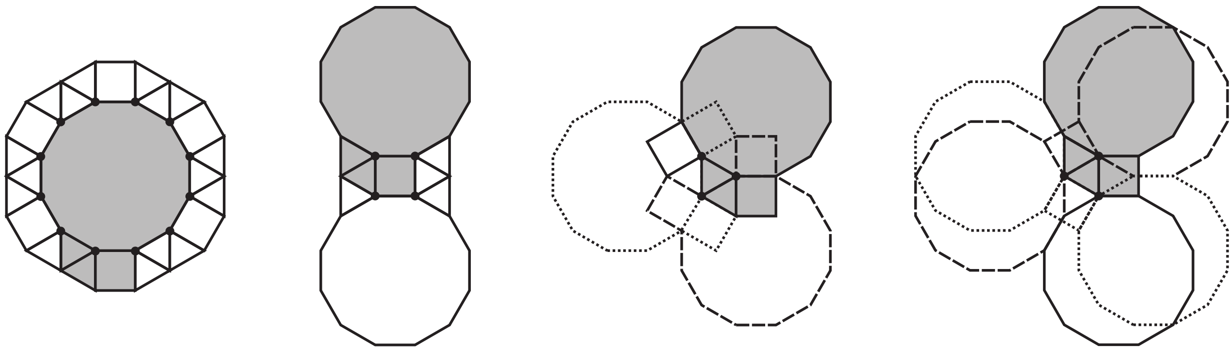

Рис. 3

Будем считать длину стороны базисной плитки паркета равной единице. Исходя из того, как выглядят окрестности базисных плиток, мы можем утверждать, что правильный многолистный паркет (3,3,4,12) содержит в себе паркет T типа ((6)3) в качестве подпаркета. С другой стороны, рассмотрение окрестности квадрата показывает, что в исходном многолистном паркете содержится также подпаркет T' тина ((6)3), сдвинутый относительно T на величину $d = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В силу трансляционных свойств паркетов, а также из-за того, что число d несоизмеримо с единицей, отсюда следует, что правильный паркет (3,3,4,12) конечнолистным не является.

5. Паркет типа (3,4,3,12)

Как и в предыдущем случае, рассмотрим какой-нибудь росток паркета (3,4,3,12) и посмотрим па окрестности базисных плиток, если мы начнём строить паркет, исходя из этого ростка (результат изображён на рис. 4).

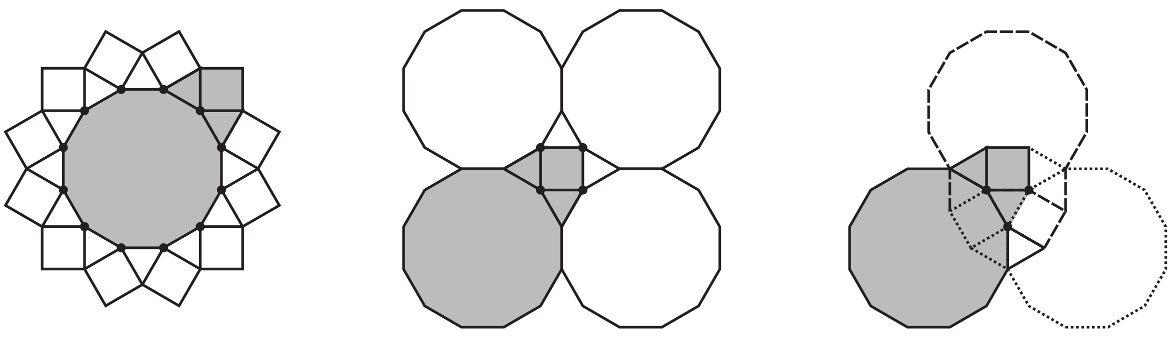

Рис. 4

Возьмём за основу окрестность треугольника и продолжим построение паркета, накладывая такие окрестности на появляющиеся новые треугольники (для облегчения понимания на рис. 5, иллюстрирующем этот процесс, двенадцатиугольники не изображены).

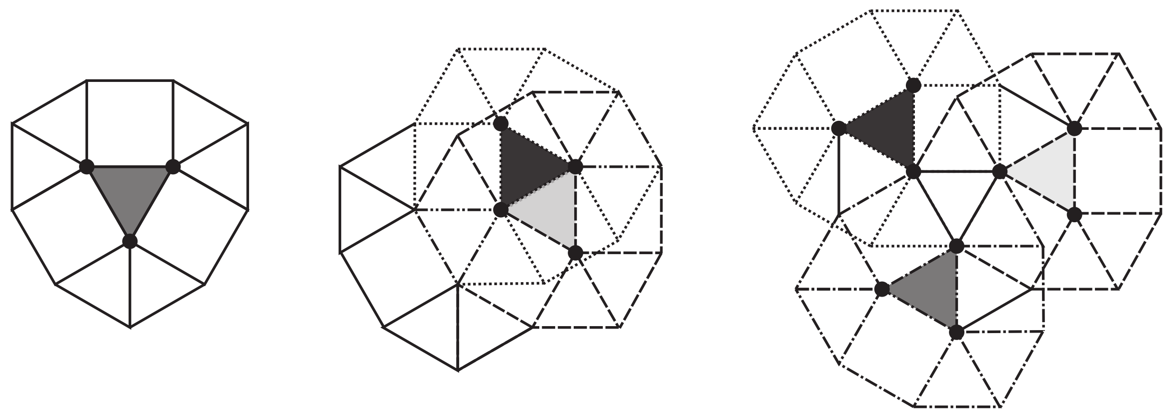

Рис. 5

Экстраполируя указанное построение, мы можем утверждать, что правильный многолистный паркет (3,4,3,12) содержит в себе паркеты T типа ((6)3) и T_2 типа ((3)3,(2)4) в качестве подпаркетов. С другой стороны, продолжая этот процесс построения от треугольника, лежащего на другом уровне подпаркета T_2, мы обнаружим, что в исходном многолистном паркете содержится также подпаркет T_1' типа ((6)3), сдвинутый относительно T_1 на величину $d = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (как и ранее, длину стороны базисной плитки паркета мы считаем равной единице). В силу трансляционных свойств паркетов, а также из-за того, что число d несоизмеримо с единицей, отсюда следует, что правильный паркет (3,4,3,12) конечнолистным не является.

6. Паркет типа (3,4,4,6)

Аналогично случаям, разобранным ранее, рассмотрим какой-нибудь росток паркета (3,4,4,6) и посмотрим на окрестности базисных плиток (см. рис. 6).

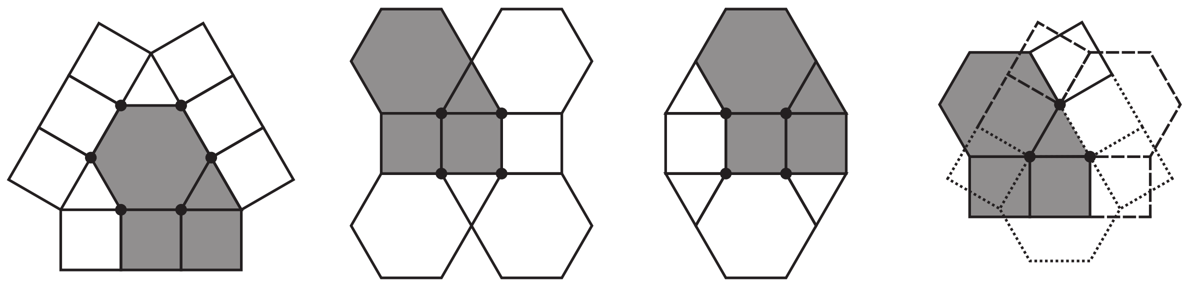

Рис. 6

Возьмём за основу окрестность квадрата и продолжим построение паркета, накладывая окрестности разных базисных плиток на появляющиеся новые многоугольники, см. рис. 7.

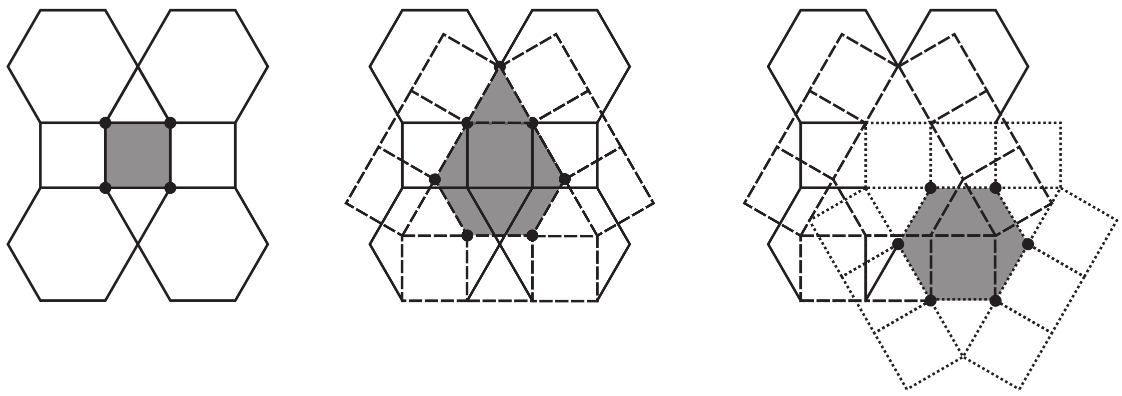

Рис.7

Теперь рассмотрим бесконечные полосы квадратов единичной ширины, которые регулярно встречаются в многолистном правильном паркете (3,4,4,6). Из второй иллюстрации на рис. 7 ясно, что существуют параллельные полосы, расстояние между нижними границами которых равно $\sqrt{3}$. А из третьей иллюстрации видно, что существуют также такие полосы, расстояние между нижними границами которых составляет $d = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (более того, квадраты этих полос сдвинуты друг относительно друга по горизонтали). Из несоизмеримости этих двух чисел вкупе с трансляционными свойствами паркетов мы делаем вывод, что правильный паркет (3,4,4,6) конечнолистным не является.

7. Паркет типа (3,3,6,6)

Последний из нашего списка паркетов является конечнолистным. Это следует из того факта, что множество всех его узлов дискретно (и совпадает с множеством узлов паркета ((6)3), которых можно рассматривать как подпаркет искомого паркета), а количество различных возможных ростков, вершины которых являются одной и той же фиксированной точкой, конечно. Окрестности базисных плиток произвольного ростка изображены на рис. 8.

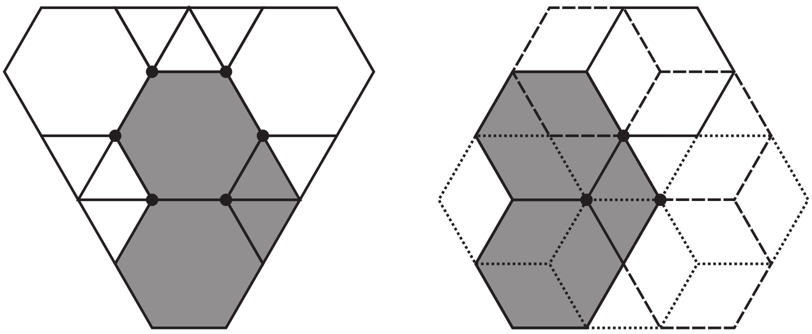

Рис. 8

Дня того, чтобы выяснить, каково количество слоев, накрывающих каждую точку плоскости, необходимо уточнить, что именно мы считаем слоем. На текущий момент по этому вопросу полной ясности не наблюдается. Однако кажется логичным считать, что приведённая на рис. 8 окрестность правильного шестиугольника представляет собой один слой, а окрестность правильного треугольника — два слоя.

Чтобы выяснить, сколькими слоями покрывается каждая точка плоскости, мы рассмотрим всевозможные ростки, которыми её можно накрыть. Дня удобства будем считать, что данная точка является узлом правильного многолистного паркета (3,3,6,6). Все варианты ростков представлены на рис. 9 (накрываемая точка жирная).

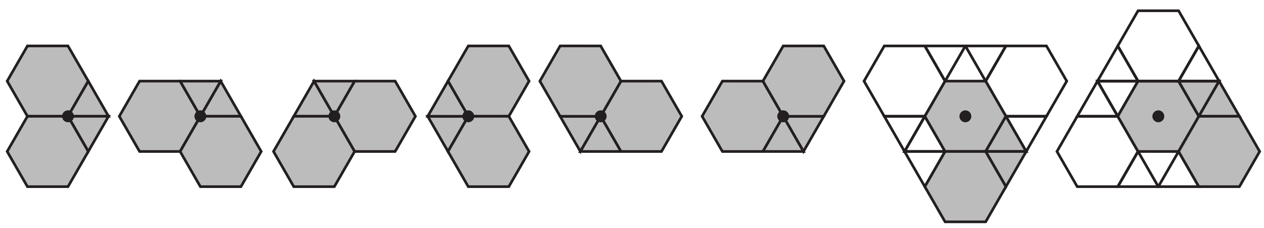

Рис. 9

Таким образом, правильный паркет (3,3,6,6) является восьмилистным.

8. Заключение

Итак, исследование всех возможных типов вершин и продолжений их ростков до правильных многолистных паркетов дало следующие результаты:

Всего возможных типов вершин 21.

11 типов вершин соответствуют однолистным паркетам. Это стандартные правильные паркеты: ((6)3); ((4)4); ((3)6); (3,12,12); (4,8,8); (3,6,3,6); ((4)3,6); (3,4,6,4); ((3)3,(2)4); ((2)3,4,3,4); (4,6,12).

Один тип вершины соответствует восьмилистному паркету: (3,3,6,6).

Остальные девять типов вершин соответствуют бесконечнолистным паркетам. Это типы вершин: (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (4,5,20), (5,5,10), (3,3,4,12), (3,4,3,12), (3,4,4,6).

Литература

[1] Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию, — Москва, “Наука”, 1966.

[2] Колмогоров А.Н. Паркеты из правильных многоугольников, — Квант, 1986, №8, стр. 3–7.

[3] Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов, — Квант, 1979, №2, стр. 9–14.

Нурлигареев Хайдар Джамилевич,
аспирант Кабинета методики преподавания
элементарной математики механико-математического
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

E-mail: haidar_nur@yahoo.com