Examen Réparti 2
Durée : 2h00

Barême indicatif. Notes de cours autorisées. Aucun document électronique autorisé. Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté dans la rédaction.

Les trois parties doivent être traitées sur des copies séparées.

1 Algorithmes de Model-Checking

Exercice 1 ($5\frac{1}{2}$ points)

On fixe $AP = \{p, q\}$ l'ensemble des propositions atomiques considérées, et l'alphabet associé $\Sigma = 2^{AP}$. On considère les formules $\alpha = p \cup q$, $\beta = q \cup p$, $\psi = (p \rightarrow \alpha) \wedge (q \rightarrow \beta)$ et $\varphi = \mathsf{G}\,\psi$. L'objectif de l'exercice est de construire l'automate $\mathcal{A}_\varphi$ associé à la formule φ, à l'aide de la construction vue en cours.

(a) ($\frac{1}{2}$ point) Ecrire φ en forme normale négative.

(b) ($1\frac{1}{2}$ points) Dessiner le graphe de réduction commençant en $\{\varphi\}$

(c) ($1\frac{1}{2}$ points) Dessiner les transitions partant de l'état $\{\varphi\}$ de l'automate $\mathcal{A}_\varphi$.

(d) (1 point) Compléter la construction et dessiner l'automate $\mathcal{A}_\varphi$ en entier.

(e) ($\frac{1}{2}$ point) On considère les ensembles d'états acceptants F_α et F_β. Déterminer ces ensembles.

(f) ($\frac{1}{2}$ point) Donner sous forme normale négative la formule que l'on cherche à vérifier par model-checking à l'aide de cet automate.

Exercice 2 ($4\frac{1}{2}$ points)

On considère les propositions atomiques p, q et r, étiquetant les états de la structure de Kripke K définie ci-dessous :

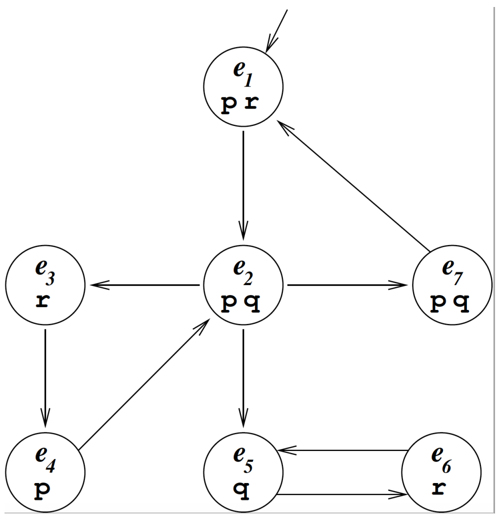


FIGURE 1 – structure de Kripke K, d'état initial e_1

On considère les formules CTL suivantes :

— P1 : $(state = e_6) \implies EF(EGp)$

— P2 : $AG(EF(EGp))$

— P3 : $AG(p \implies AXA(pUq))$

Pour chacune d'entre elles, déterminez si elle est vérifiée dans l'état initial de la structure K, en donnant des éléments de justification.

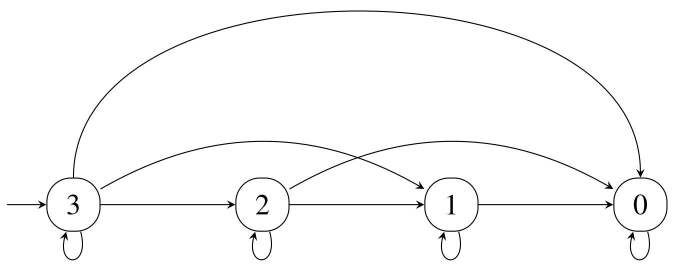
Indication : Pour P2 et P3, vous donnerez l'ensemble S_ϕ des états satisfaisant chaque sous-formule ϕ, ce qui vous permettra de conclure. On ne demande pas le détail des calculs permettant d'obtenir les ensembles S_ϕ. Ainsi, pour P2, les sous-formules à considérer sont p, EGp et $EF(EGp)$, et pour P3 les sous formules sont p, q, $ApUq$, $AXApUq$, $p \implies AXApUq$. A titre d'exemple, on note S_p l'ensemble des états vérifiant p : $S_p = \{e_1, e_2, e_4, e_7\}$.

Total des points de la section : 10 points

2 Modélisation probabiliste et Fiabilité

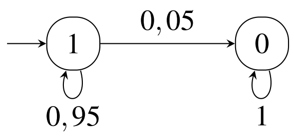
Exercice 3 (2 points)

Le graphe de la figure ci-dessous modélise les changements d'états possibles pour une variable représentant le nombre de répliques non défaillantes dans une architecture répliquée. Nous avons utilisé la convention usuelle pour l'état initial du système (état 3). Vous supposerez que chaque défaillance est indépendante des autres, que pour chaque réplique sa probabilité de défaillir lors de l'exécution de l'architecture est notée q, et que chaque transition correspond à une exécution complète de l'architecture. Complétez ce graphe pour définir une chaîne de Markov à temps discret de telle sorte que la probabilité d'être dans l'état i au bout de k exécutions de l'architecture corresponde exactement à la probabilité transitoire d'être dans l'état i à la date k+1. (il est fortement recommandé de décomposer votre travail en deux étapes : déterminer les scénarios correspondants à chaque transition, calculer leurs probabilités).



Exercice 4 (1½ points)

La chaîne de Markov suivante capture le cas où on a une fonction périodique de période T pouvant défaillir à chaque exécution avec une probabilité de $0,05$. L'état 1 représente l'état fonctionnel du composant, l'état 0 représente l'état défaillant du composant.



(a) Étendez ce modèle pour représenter le fait que l'état du composant puisse être réparé mais que cela prend l'équivalent d'une période d'exécution avec une probabilité de 0.99. Si le composant reste défaillant la réparation de l'état se poursuit dans la période suivante avec la même probabilité de succès. (0,5 pt)

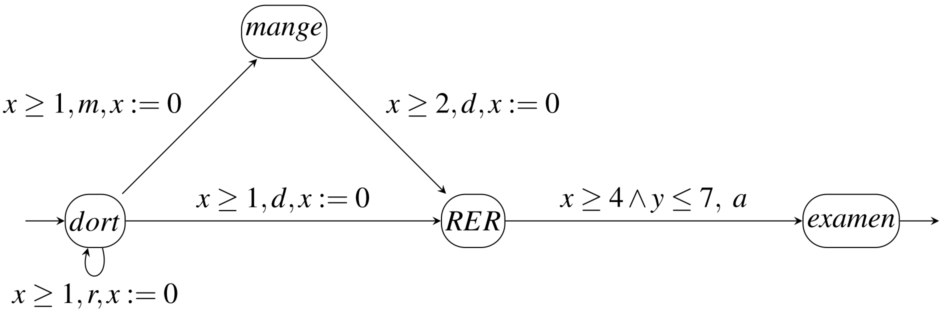
(b) Modifiez le modèle de sorte à prendre en compte qu'après une première défaillance, la probabilité de défaillance à partir d'un état correct pour une exécution est de 0.1. (1 pt)

Total des points de la section : 3½ points

3 Automates temporisés

Exercice 5 (6½ points)

(a) Anissa doit se rendre à Jussieu pour passer un examen qui commence à 8h45 et son réveil sonne à 7h. Son comportement est alors modélisé par l'automate temporisé $\mathcal{A}$ suivant, dans lequel l'unité de temps représente 15 minutes et les actions r, m, d, a correspondent respectivement à se rendormir, aller prendre le petit déjeuner, partir en RER et arriver à la salle d'examen :



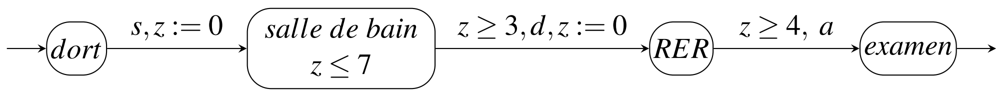
Pour les questions suivantes, représenter les zones demandées dans le plan, avec x en abscisse et y en ordonnée, et donner les contraintes d'horloges qui les définissent.

i. (1½ points) Déterminer les zones successives atteintes dans l'état *dort* à chaque fois qu'Anissa se rendort.

ii. (1½ points) En supposant qu'Anissa se rendort une seule fois et ne prend pas de petit déjeuner, déterminer la zone atteinte dans l'état *RER* après la transition d.

iii. (1½ points) Déterminer la zone atteinte dans l'état *RER* après la séquence de transitions md.

(b) (2 points) Le comportement de Boris est décrit par l'automate $\mathcal{B}$ suivant, où s correspond à se rendre à la salle de bain :



Construire le produit synchronisé de A et $\mathcal{B}$ en supposant qu'Anissa et Boris veulent partir (et arriver) ensemble, les actions d et a étant donc exécutées simultanément.

Total des points de la section : 6½ points