Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n° 7

Exercice 1 — Arithmétique de Peano

C'est une théorie écrite sur le langage $\mathcal{L} = \{0, S, +, \times, =\}$, où S est la fonction unaire *successeur*.

Formellement, on a la signature S suivante : $\mathcal{P}_S = \{=\}$, $\mathcal{F}_S = \{S, +, \times\}$ et $\mathcal{C}_S = \{0\}$. On interprètera l'égalité (et seulement celle-ci) de façon canonique. De plus, on écrira les opérateurs $+$ et $\times$ de façon infixé là encore. *Attention* : notez bien que $+$ et $\times$ ne sont *pas* supposés commutatifs ici !

Soit P_0 l'ensemble des sept formules suivantes :

F1 : $\forall x, S(x) \neq 0$

F2 : $\forall x, x = 0 \vee (\exists y, x = S(y))$

F3 : $\forall x, \forall y, S(x) = S(y) \to x = y$

F4 : $\forall x, x + 0 = x$

F5 : $\forall x, \forall y, x + S(y) = S(x + y)$

F6 : $\forall x, x \times 0 = 0$

F7 : $\forall x, \forall y, x \times S(y) = x \times y + x$

De plus, à P_0 nous ajoutons la règle suivante, valable pour n'importe quel prédicat F :

$$\frac{\Gamma \vdash F(0) \qquad \Gamma \vdash \forall x, F(x) \to F(S(x))}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}\ Rec$$

La théorie $PA = P_0 \cup Rec$ est appelée *arithmétique de Peano*.

On pourra utiliser deux règles d'introduction et d'élimination de l'égalité :

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} = i \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t) \qquad \Gamma \vdash u = t}{\Gamma \vdash A(u)} = e$$

1. Démontrer que F2 est superflue (c'est à dire que $\vdash$ F2 sans utiliser la règle F2).
2. Démontrer que l'addition est associative (c'est à dire que $\vdash \forall x, \forall y, \forall z, (x + y) + z = x + (y + z)$).
3. Démontrer que l'addition est commutative (c'est à dire que $\vdash \forall x, \forall y, x + y = y + x$). *Indication : on commencera par démontrer que l'addition est commutative dans les formules F4 et F5.*

4. Démontrer le théorème T et la règle dérivée $\exists i_g$ suivants (la règle $\wedge i_g$ pourra être utilisée) :

$$T : \forall y, \forall x, ((x + y = x) \to (y = 0));$$

$$\frac{\Gamma; A; B \vdash F}{\Gamma; A \wedge B \vdash F} \wedge i_g; \qquad \frac{\Gamma; A(x_0) \vdash C \qquad x_0 \textit{ non libre ni dans } \Gamma \textit{ ni dans } C}{\Gamma; \exists x, A(x) \vdash C} \exists i_g.$$

5. Soit $x \leqslant y$ l'abréviation de la formule $\exists z, x + z = y$. Démontrez que :
   (a) $\cdot \leqslant \cdot$ est une relation d'ordre (réflexivité, antisymétrie et transitivité) ;
   (b) 0 est le plus petit élément ;
   (c) $\forall x, x \leqslant S(x)$.

Exercice 2 — *Propriété :* Il existe deux irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel. *Preuve :* Supposons que le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ soit rationnel, alors prenons $x = y = \sqrt{2}$. Sinon, prenons $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$. *CQFD.*

La logique intuitionniste est une logique constructiviste. Ainsi, on ne veut pas seulement connaître l'existence d'une solution, on veut pouvoir la construire. Par conséquent la preuve de la propriété précédente n'est pas valide en logique intuitionniste. Par rapport aux règles vues en cours, une seule d'entre elle est modifiée afin de raisonner en logique intuitionniste. La règle *Abs* est remplacée par la règle *Abs int* suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash_{int} \bot}{\Gamma \vdash_{int} F} \textit{Abs int}$$

On admet qu'alors la règle *Abs* classique n'est alors *pas* démontrable.

Démontrer que l'on ne peut pas prouver en logique intuitionniste : $\vdash_{int} \neg\neg F \to F$.