Master 1 Année 2010/2011

Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n° 8

Exercice 1 — Quelques λ-termes

Pour chacun de ces termes, en donner une forme normale (si elle existe) :

1. $(\lambda x.x)\ (\lambda x.y)$
2. $(\lambda y.\lambda x.y\ (y\ x))\ x$
3. $(\lambda x.x\ x\ x)\ (\lambda x.y)$
4. $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.y\ y)$

Exercice 2 — Multiplication

On rappelle la définition du cours : $\text{mul} = \lambda x.\lambda y.\mathsf{rec}\ x\ 0\ (\lambda x.\lambda h.\text{add}\ y\ h)$.

En supposant que $\text{add}\ S^n0\ S^m0 \overset{*}{\hookrightarrow} S^{n+m}0$, prouver le lemme suivant :

$$\text{mul}\ S^n0\ S^m0 \overset{*}{\hookrightarrow} S^{nm}0$$

Exercice 3 — Exponentiation

En s'inspirant de la fonction multiplication précédente, écrire un λ-terme exp tel que $\exp\ S^n0\ S^m0 \overset{*}{\hookrightarrow} S^{n^m}0$. Prouver ensuite sa correction.

Remarque : On prend ici la convention $0^0 = 1$.

Indication : Remarquez que la multiplication est à l'exponentiation ce que l'addition est à la multiplication.

Exercice 4 — Suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On souhaite écrire un λ-terme qui calcule cette suite. Pour cela on introduit la suite des *couples* de Fibonacci, définie par $C_n = (F_n, F_{n+1})$.

1. Trouver une relation de récurrence sur la suite $(C_n)_n$
2. Déduire un λ-terme cfibo tel que $\text{cfibo}\ S^n0 \overset{*}{\hookrightarrow} \langle S^{F_n}0, S^{F_{n+1}}0\rangle$, et prouver sa correction.
3. Écrire un λ-terme fibo tel que $\text{fibo}\ S^n0 \overset{*}{\hookrightarrow} S^{F_n}0$, et prouver sa correction.

Exercice 5 — Factorielle

Écrire un λ-terme fact tel que $\text{fact}\ S^n0 \overset{*}{\hookrightarrow} S^{n!}0$, et prouver sa correction.

Exercice 6 — Quelques λ-termes célèbres.

1. On pose $\omega = \lambda x.x\ x$ et $\Omega = \omega\ \omega$. Effectuer une étape de réduction de Ω. Que remarquez-vous ?
2. On pose $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$. Effectuer des réductions de $Y\ f$. Que remarquez-vous ?