Master 1 InformatiqueAnnée 2010/2011

Logique pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Décembre 2010

Examen réparti n° 2

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Quelques propositions*

Voici 6 propositions :

1. $(P \to P) \to Q$
2. $(P \to Q) \to P$
3. $(Q \to P) \to P$
4. $P \to (P \to Q)$
5. $P \to (Q \to P)$
6. $Q \to (P \to P)$

Parmi elles, certaines sont des tautologies, d'autres non.

Question (I.1) Pour chacune de ces propositions :

1. si ce n'est pas une tautologie, donnez une interprétation $\mathcal{I}$ de P et Q qui la rende fausse.
2. sinon, montrez que c'est une tautologie. Vous pourrez utiliser la méthode de votre choix.

Exercice II : *Satisfaisabilité et conséquence sémantique*

Question (II.1) Montrez que si $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$ et $\mathcal{M}, \rho \models F$ alors $\mathcal{M}, \rho \models G$.
C'est la régle du modus ponens au niveau sémantique. Il faut utiliser la définition de $\models$.

Question (II.2) Soit l'ensemble d'hypothèses
$\Gamma = \{\forall x.(P(x) \to R(x)); \forall y.(Q(y) \to R(y)); \exists z.(Q(z) \vee P(z))\}$. Montrez que $\Gamma \models \exists x.R(x)$.
Vous pouvez utiliser le résultat de la question précédente pour raisonner.

Question (II.3) Montrez que si $\mathcal{M}, \rho \models F \vee G$ et $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$ alors $\mathcal{M}, \rho \models G$.
Vous pourrez utiliser un raisonnement par l'absurde. Il faut ici aussi revenir à la définition de $\models$.

Question (II.4) Soit l'ensemble d'hypothèses
$\Gamma = \{\exists x.(P(x) \to R(x)); \forall y.(Q(y) \to R(y)); \forall z.(Q(z) \vee P(z))\}$. Montrez que $\Gamma \models \exists x.R(x)$.
Vous pourrez utiliser le résultat de la question précédente et de la première question de cet exercice. Un conseil : utilisez d'abord l'hypothèse $\exists x.(P(x) \to R(x))$.

Exercice III : *Déduction naturelle*

Question (III.1) Donnez une preuve en déduction naturelle des séquents suivants :

1. $((F \to G) \to H); (F \wedge G) \vdash H$
2. $(F \to G); \neg G \vdash \neg F$
3. $\exists x.(F(x) \vee G(x)) \vdash \exists x.F(x) \vee \exists x.G(x)$

Question (III.2) Nous allons montrer que la formule $((F \to G) \to F) \to F$ est prouvable en déduction naturelle.

1. Donnez une preuve en déduction naturelle du séquent $\neg F \vdash F \to G$.
2. En déduire une preuve en déduction naturelle du séquent $((F \to G) \to F); \neg F \vdash F$.
3. En déduire une preuve en déduction naturelle de $\vdash ((F \to G) \to F) \to F$.

Exercice IV : *Système T*

Question (IV.1) Donnez la définition du terme *even* tel que

$$\begin{array}{lcl} (even\ \mathsf{S}^{2n}\mathsf{0}) & \hookrightarrow & \mathsf{S0} \\ (even\ \mathsf{S}^{2n+1}\mathsf{0}) & \hookrightarrow & \mathsf{0} \end{array}$$

On aura, en particulier que

$$\begin{array}{lcl} (even\ \mathsf{0}) & \hookrightarrow & \mathsf{S0} \\ (even\ \mathsf{S0}) & \hookrightarrow & \mathsf{0} \end{array}$$