Master 1 Informatique Année 2011/2012

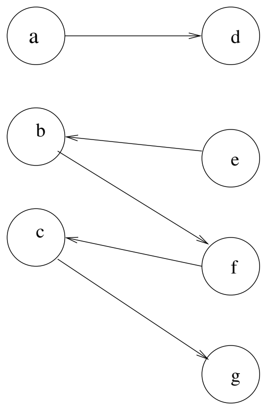
Logique pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Novembre 2011

Devoir sur table n° 1

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Modèles*

On se donne un symbole de relation binaire R. On considère l'ensemble de base (fini) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ et on se donne l'interprétation de R sous la forme du graphe suivant :



Question (I.1) Le modèle proposé satisfait-il la formule suivante :

$$\forall x.\forall y.\forall z_1.\forall z_2.(x \neq y) \wedge R(x, z_1) \wedge R(y, z_2) \rightarrow (z_1 \neq z_2)$$

Expliquez.

Question (I.2) Même question pour la formule :

$$\forall y.\exists x.R(x, y)$$

Question (I.3) Si l'une au moins des deux formules ci-dessus n'est pas statisfaite, complétez le modèle proposé pour qu'elles soient toutes deux satisfaites (ajout d'élément ou ajout de flèches à la relation).

Exercice II : *De Morgan*

On se propose de démontrer l'une des *lois de de Morgan* :

$$\neg(A \wedge B) \text{ si et seulement si } \neg A \vee \neg B$$

On décompose la preuve en deux étapes :

1. Si $\neg(A \wedge B)$ alors $\neg A \vee \neg B$.
2. Si $\neg A \vee \neg B$ alors $\neg(A \wedge B)$.

Pour chacune de ces étapes, on utilisera deux moyens :

- le moyen sémantique de la relation de conséquence ;
- le moyen syntaxique de la déduction naturelle.

Rappel : par définition de la fonction d'interprétation des formules, pour toute formule F, tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ :

- $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$ ou $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$;
- $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \bot$;
- et $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \top$.

Pour répondre aux deux questions suivantes, vous ferez aussi appel aux définitions de la conséquence sémantique $\Gamma \models F$, de relation de satisfaisabilité $\mathcal{M}, \rho \models F$ et des équivalences du Fait (2) du cours.

Question (II.1) Montrez que $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$.

Question (II.2) Montrez que $\neg A \vee \neg B \models \neg(A \wedge B)$.

Pour répondre aux deux questions suivantes, vous utiliserez les règles de la déduction naturelle, ainsi que le résultat $\vdash A \vee \neg A$ (que l'on admettra).

Question (II.3) Montrez que $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ (c'est ici que l'on utilise $\vdash A \vee \neg A$).

Question (II.4) Montrez que $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$.

Exercice III :

La *barre de sheffer* (notée $|$) est un connecteur propositionnel défini par la table de vérité suivante :

A	B	$A\|B$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

C'est l'opérateur booléen `nand`.

Soient A et B deux formules du calcul des prédicats, on dit A *est équivalente à* B si et seulement si $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$. On note $A \simeq B$.

Question (III.1) Vérifiez, à l'aide des tables de vérité, que

1. $\neg A \simeq (A|A)$
2. $(A \wedge B) \simeq \neg(A|B)$

Question (III.2) Montrez que, pour toute formule A du calcul des prédicats, il existe une formule A^* équivalente dont les seuls symboles logiques sont le connecteur propositionnel $|$ et le quantificateur $\forall$.

Pour répondre à cette question vous pourrez utiliser, sans les démontrer, les équivalences suivantes :

1. $\neg\neg A \simeq A$
2. $\neg(A \vee B) \simeq \neg A \wedge \neg B$
3. $\exists x.A \simeq \neg\forall x.\neg A$

Vous procèderez par indution sur la formule A. Nota : le cas de base, si A est une formule atomique est trivial puisque qu'alors A ne contient aucun symbole logique.