Logique
pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Janvier 2012

Devoir sur table n° 2

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Histoire de famille embrouillée*

Soit les symboles de relations binaires suivants : $Pere$, $Mere$, $Frere$, $Soeur$.

On se donne les axiomes suivants

(F1) $\forall x \forall y \forall z.((Pere(z,x) \wedge Pere(z,y)) \vee (Mere(z,x) \wedge Mere(z,y))$
$\rightarrow (Frere(x,y) \vee Soeur(x,y)))$

(F2) $\forall x \forall y.(\neg Frere(x,y) \wedge \neg Soeur(x,y)$
$\rightarrow \forall z.((\neg Pere(z,x) \vee \neg Pere(z,y)) \wedge (\neg Mere(z,x) \vee \neg Mere(z,y))))$

(F3) $\forall x \forall y.(Pere(x,y) \rightarrow \neg Mere(x,y))$

(F4) $\forall x \forall y.(Frere(x,y) \rightarrow \neg Soeur(x,y))$

Question (I.1) [2×3 pts]

Soit les formules

(C1) $\forall x \forall y.(Frere(x,y) \wedge \neg Soeur(y,x) \rightarrow Frere(y,x))$

(C2) $\forall x \forall y.(Mere(x,y) \rightarrow \neg Pere(x,y))$

(C3) $\forall x \forall y.(Soeur(x,y) \rightarrow \exists z.(Pere(z,x) \wedge Pere(z,y)))$

Certaines des trois formules (C1), (C2) et (C3) sont conséquences des axiomes d'autres non. Dites lesquelles sont conséquences des axiomes et celles qui ne le sont pas. Pour les formules qui ne sont pas conséquence, vous donnerez un contre-exemple ; pour les autres, vous justifierez votre réponse par les moyens de votre choix.

Attention : ne vous laissez pas tromper par les noms choisis pour les symboles de relation. Seuls comptent les axiomes et les règles logiques.

Exercice II : *Déduction naturelle*

Question (II.1) [2×3 pts]

Donnez une dérivation en déduction naturelle des formules suivantes

- $(F \to C) \to ((F \wedge G) \to C)$
- $((F \vee G) \to C) \to ((H \to F) \to (H \to C))$
- $(\neg F \to F) \to F$

Exercice III : *Conséquence logique*

Question (III.1) [2×2 pts] Montrez que

- $\exists x.\forall y.F \models \forall y.\exists x.F$
- $\forall y.\exists x.F \not\models \exists x.\forall y.F$

Exercice IV : *Système T*

Question (IV.1) [3 pts]

On utilise le terme $\mathsf{add} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Soit le terme

$$\begin{array}{lll} \lambda x.(\mathsf{rec}\ x & \lambda y.y & \\ & \lambda x_1 \lambda h \lambda y.(\mathsf{rec}\ y & (h\ \mathsf{S}x_1) \\ & & \lambda y_1 \lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g))) \end{array}$$

Montrez qu'il est de type $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Question (IV.2) [3 pts]

On utilise le terme mul vu en cours ou en TD qui calcule la multiplication de deux entiers. C'est-à-dire que $(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}^n0\ \mathsf{S}^m0)$ se réduit en $\mathsf{S}^{n\times m}0$.

Soit le terme $\mathsf{f} = \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \mathsf{S}0\ \lambda x_1 \lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ \ h))$. Montrez que ce terme calcule la factorielle. C'est-à-dire que $(\mathsf{f}\ \mathsf{S}^n0)$ se réduit en $\mathsf{S}^{n!}0$ où $n!$ est défini par $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$.