Master 1 Informatique Année 2013/2014

Logique pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Janvier 2014

Devoir sur table n° 2

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants. Sauf indication contraire, les règles de la *déduction naturelle* sont celles données *en cours*, la définition de la *conéquence sémantique* est celle donnée *en cours* qui s'appuie sur la relation de *satisfaction* donnée *en cours* qui, elle-même s'appuie sur la définition de la *fonction d'interprétation* donnée *en cours*.
Vous pouvez utiliser tous les faits et lemmes vus *en cours*, mais uniquement ceux-ci, sauf mention explicite du contraire.

Dans les deux premiers exercices, vous n'utiliserez ni le théorème de complétude, ni le théorème de correction.

Exercice I : *Conséquence sémantique*

Question (I.1) La conséquence $F \to G, G \models F$ n'est pas toujours vraie. Pourquoi ?

RÉPONSE: Soit $\mathcal{M}, \rho$ tels que $\mathcal{M}, \rho \models G$ et $\mathcal{M}, \rho \not\models F$. Par $\mathcal{M}, \rho \models G$, on a également que $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$. On a donc $\mathcal{M}, \rho \models \{F \to G, G\}$, mais $\mathcal{M}, \rho \not\models F$. Donc $F \to G, G \not\models F$.

Question (I.2) La conséquence suivante n'est pas toujours vraie :

$$(\forall x.F(x)) \vee (\forall x.G(x)) \models \forall x.(F(x) \to G(x))$$

pourquoi ?

RÉPONSE: Soit $\mathcal{M}, \rho$ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.F$, mais $\mathcal{M}, \rho \not\models \forall x.G$. On a que $\mathcal{M}, \rho \models (\forall x.F) \vee (\forall x.G)$. Mais, puisque $\mathcal{M}, \rho \not\models \forall x.G$, il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \not\models G$. Comme, $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.F$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \models F$. Donc $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \not\models F \to G$ et donc $\mathcal{M}, \rho \not\models \forall x.(F \to G)$.

Question (I.3) La conséquence suivante est vraie :

$$\exists x.(F(x) \to G(x)), \forall x.F(x) \models \exists x.G(x)$$

pourquoi ?

RÉPONSE: Soit $\mathcal{M}, \rho$ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.(F \to G)$ et $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.F$. Il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \models F \to G$. On a également que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \models F$. D'où $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \models G$ et donc $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.G$.

Exercice II : *Dérivation formelle*

Question (II.1) Donnez une *dérivation en déduction naturelle* du séquent

$$\exists x.(F(x) \to G(x)) \vdash (\forall x.F(x)) \to (\exists x.G(x))$$

Réponse:

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x.(F \to G) \vdash \exists x.(F \to G)}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{F \to G \vdash F \to G}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall x.F \vdash \forall x.F}\,Ax}{\forall x.F \vdash F}\,\forall e}{F \to G, \forall x.F \vdash G}\,\to e}{\dfrac{\exists x.(F \to G), \forall x.F \vdash G}{\dfrac{\exists x.(F \to G), \forall x.F \vdash \exists x.G}{\exists x.(F \to G) \vdash (\forall x.F) \to (\exists x.G)}\,\to i}\,\exists i}\,\exists e$$

Question (II.2) Donnez une *dérivation en déduction naturelle* du séquent

$$\vdash F \to (G \to \neg(\neg F \vee \neg G))$$

Réponse:

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg F \vee \neg G \vdash \neg F \vee \neg G}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,Ax \qquad \dfrac{}{\neg F \vdash \neg F}\,Ax}{F, \neg F \vdash \bot}\,\neg e \qquad \dfrac{\dfrac{}{G \vdash G}\,Ax \qquad \dfrac{}{\neg G \vdash \neg G}\,Ax}{G, \neg G \vdash \bot}\,\neg e}{\dfrac{F, G, \neg F \vee \neg G \vdash \bot}{\dfrac{F, G \vdash \neg(\neg F \vee \neg G)}{\vdash F \to G \to \neg(\neg F \vee \neg G)}\,\to i (\times 2)}\,\neg i}\,\vee e$$

Question (II.3) Donnez une *dérivation en déduction naturelle* du séquent

$$\vdash \neg(\neg F \vee \neg G) \to F$$

Réponse:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg F \vdash \neg F}\,Ax}{\neg F \vdash \neg F \vee \neg G}\,\vee i1 \qquad \dfrac{}{\neg(\neg F \vee \neg G) \vdash \neg(\neg F \vee \neg G)}\,Ax}{\dfrac{\neg(\neg F \vee \neg G), \neg F \vdash \bot}{\dfrac{\neg(\neg F \vee \neg G) \vdash F}{\vdash \neg(\neg F \vee \neg G) \to F}\,\to i}\,Abs}\,\neg e$$

<u>Exercice III :</u> *Interdéfinissabilité des connecteurs*

Les formules $F \wedge G$ et $\neg(\neg F \vee \neg G)$ sont logiquement équivalentes (c'est une des lois de de Morgan). On peut donc se passer du connecteur $\wedge$. On montre dans cet exercice que l'on peut également se passer des règles $\wedge i$, $\wedge e1$ et $\wedge e2$ si l'on applique aux formules la transformation $()^*$ suivante :

- $(\neg F)^* \equiv \neg(F)^*$
- $(F \wedge G)^* \equiv \neg(\neg(F)^* \vee \neg(G)^*)$
- $(F \vee G)^* \equiv (F)^* \vee (G)^*$
- $(F \to G)^* \equiv (F)^* \to (G)^*$
- $(\forall x.F)^* \equiv \forall x.(F)^*$
- $(\exists x.F)^* \equiv \exists x.(F)^*$

On note $(\Gamma)^*$ l'ensemble de formules obtenu en appliquant la transformation $()^*$ à toutes les formules de Γ. La traduction d'un séquent $(\Gamma \vdash F)^*$ est $(\Gamma)^* \vdash (F)^*$ avec la convention $(\bot)^* \equiv \bot$. Par convention $(\Gamma, F)^* \equiv \Gamma^*, F^*$ et $(\Gamma, \Gamma')^* \equiv \Gamma^*, (\Gamma')^*$.

Question (III.1) Montrez, par induction sur les dérivations, que si $\Gamma \vdash F$ est dérivable alors $(\Gamma \vdash F)^*$ est dérivable.

Vous utiliserez les résultats des deux dernières questions de l'exercice précédent.

Réponse:

– Règle Ax : on a $\overline{\Gamma, F \vdash F}^{\,Ax}$; on veut une dérivation de $\Gamma^*, F^* \vdash F^*$. Ce que l'on a directement avec la règle Ax.

– Règle Aff : on a $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash F\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash F}\,Aff$. Par hypothèse d'induction, $\Gamma^* \vdash F^*$ est dérivable. En appliquant la règle Aff avec $(\Gamma')^*$, on obtient la dérivation de $(\Gamma, \Gamma')^* \vdash F^*$.

– Règle Abs : on a $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \neg F \vdash \bot\end{array}}{\Gamma \vdash F}\,Abs$; on veut une dérivation de $\Gamma^* \vdash F^*$.
Par hypothèse d'induction, on a une dérivation de $\Gamma^*, \neg F^* \vdash \bot$. En appliquant la règle Abs, on a aussi une dérivation de $\Gamma^* \vdash F^*$.

– le cas des règles $\neg i$, $\neg e$, $\vee i1$, $\vee i2$, $\vee e$, $\rightarrow i$, $\rightarrow e$, $\forall i$, $\forall e$, $\exists i$ et $existse$ s'obtiennent aussi facilement, par hypothèse d'induction.

– Règle $\wedge i$: on a $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash F\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash G\end{array}}{\Gamma \vdash F \wedge G}\,\wedge i$; on veut une dérivation de $\Gamma^* \vdash (F \wedge G)^*$, c'est-à-dire, une dérivation de $\Gamma^* \vdash \neg(\neg F^* \vee G^*)$.
Par hypothèse d'induction, on a une dérivation de $\Gamma^* \vdash F^*$ et une dérivation de $\Gamma^* \vdash G^*$. Par la question II.2, le séquent $\vdash F^* \rightarrow G^* \rightarrow \neg(\neg F^* \vee G^*)$ est dérivable. En appliquant 2 fois la règle $\rightarrow e$ (avec les hypothèses d'induction) on obtient une dérivation de $\Gamma^* \vdash \neg(\neg F^* \vee G^*)$. Ce que l'on voulait.

– Règle $\wedge e1$: on a $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash F \wedge G\end{array}}{\Gamma \vdash F}\,\wedge e1$; on veut une dérivation de $\Gamma^* \vdash F^*$.
Par hypothèse d'induction, on a une dérivation de $\Gamma^* \vdash (F \wedge G)^*$, c'est-à-dire, une dérivation de $\Gamma^* \vdash \neg(\neg F^* \vee G^*)$. Par la question II.3 on a une dérivation de $\vdash \neg(\neg F^* \vee G^*) \rightarrow F^*$. En appliquant la règle $\rightarrow e$ avec l'hypothèse d'induction, on obtient une dérivation de $\Gamma^* \vdash F^*$.

<u>Exercice IV :</u> *Système T*

Question (IV.1) On se donne le terme suivant :

$$\begin{array}{l}\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{S}y\\ \qquad \lambda x_1 \lambda h_x \lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ (h_x\ \mathsf{S0})\\ \qquad\qquad\qquad \lambda y_1 \lambda h_y.(h_x\ h_y)))\end{array}$$

Quel est son type ? Donnez sa dérivation de typage à l'aide des règles du système T.

NOTA : comme la dérivation ne tiendra vraisemblablement sur une seule page, découpez là en sous-arbres de dérivations. On (pro)pose
- $ty_0 \equiv (h_x\ \mathsf{S0})$
- $ty_s \equiv \lambda y_1 \lambda h_y.(h_x\ h_y)$
- $tx_0 \equiv \lambda y.\mathsf{S}y$
- $tx_s \equiv \lambda x_1 \lambda h_x \lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ ty_0\ ty_s)$

RÉPONSE: Le type du terme est : $I\!N \rightarrow I\!N \rightarrow I\!N$, plus précisément, $I\!N \rightarrow (I\!N \rightarrow I\!N)$.

Étapes de la dérivation de typage :

(E1) typage de ty_0

$$\dfrac{\overline{h_x : I\!N \rightarrow I\!N \vdash h_x : I\!N \rightarrow I\!N}^{\,Ax} \quad \dfrac{\overline{\vdash \mathsf{0} : I\!N}^{\,N0}}{\vdash \mathsf{S0} : I\!N}\,Ns}{h_x : I\!N \rightarrow I\!N \vdash (h_x\ \mathsf{S0}) : I\!N}\,\rightarrow e$$

(E2) typage de ty_s

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \vdash h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ax} \qquad \dfrac{}{h_y : \mathbb{N} \vdash h_y : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ax}}{h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, h_y : \mathbb{N} \vdash (h_x\ h_y) : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle \to e}}{h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, y_1 : \mathbb{N}, h_y : \mathbb{N} \vdash (h_x\ h_y) : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Aff(y_1:\mathbb{N})}}{h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \vdash \lambda y_1 \lambda h_y.(h_x\ h_y) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}}\,{\scriptstyle \to e(\times 2)}$$

(E3) typage de tx_0

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y : \mathbb{N} \vdash y : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ax}}{y : \mathbb{N} \vdash \mathsf{S}y : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ns}}{\vdash \lambda y.\mathsf{S}y : \mathbb{N} \to \mathbb{N}}\,{\scriptstyle \to i}$$

(E4) typage de tx_s

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y : \mathbb{N} \vdash y : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ax} \qquad \begin{array}{c}(E1)\\ \vdots \\ h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \vdash ty_0 : \mathbb{N}\end{array} \qquad \begin{array}{c}(E2)\\ \vdots \\ h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \vdash ty_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}\end{array}}{h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; y : \mathbb{N} \vdash (\mathsf{rec}\ y\ ty_0\ ty_s) : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ne}}{x_1 : \mathbb{N}, h_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; y : \mathbb{N} \vdash (\mathsf{rec}\ y\ ty_0\ ty_s) : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Aff(x_1:\mathbb{N})}}{\lambda x_1 \lambda h_x \lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ ty_0\ ty_s) : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})}\,{\scriptstyle \to i(\times 3)}\ \vdash$$

(E5)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \mathbb{N} \vdash x : \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ax} \qquad \begin{array}{c}(E3)\\ \vdots \\ \vdash tx_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\end{array} \qquad \begin{array}{c}(E4)\\ \vdots \\ \vdash \lambda x_1 \lambda h_x \lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ ty_0\ ty_s) : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})\end{array}}{x : \mathbb{N} \vdash (\mathsf{rec}\ x\ tx_0\ tx_s) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}}\,{\scriptstyle Ne}}{\vdash \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ tx_0\ tx_s) : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})}\,{\scriptstyle \to i}$$

Question (IV.2) On pose $A \equiv \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.y\ \lambda x_1 \lambda h.\lambda y.(h\ (\mathsf{S}y)))$.

On peut également poser :

$A_0 \equiv \lambda y.y$

$A_s \equiv \lambda x_1 \lambda h.\lambda y.(h\ (\mathsf{S}y))$

on a alors l'écriture simplifiée : $A \equiv \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ A_0\ A_s)$

Rappel : en λ-calcul l'application est associative à gauche. Par exemple, $(A\ N\ M)$ est une abréviation pour $((A\ N)\ M)$.

Soit N et M deux termes.

1. réduisez l'application $(A\ \mathsf{0}\ M)$

Réponse :

$$\begin{array}{lcl}
(A\ \mathsf{0}\ M) & \equiv & ((\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ A_0\ A_s)\ \mathsf{0})\ M) \\
& \hookrightarrow & ((rec\ \mathsf{0}\ A_0\ A_s)\ M) \\
& \hookrightarrow & (A_0\ M) \\
& \equiv & (\lambda y.y\ M) \\
& \hookrightarrow & M
\end{array}$$

2. réduisez l'application $(A\ (\mathsf{S}N)\ M)$

Réponse :

$$\begin{array}{lcl}
(A\ \mathsf{0}\ M) & \equiv & ((\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ A_0\ A_s)\ (\mathsf{S}\ N))\ M) \\
& \hookrightarrow & ((\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}\ N)\ A_0\ A_s)\ M) \\
& \hookrightarrow & ((A_s\ N\ (\mathsf{rec}\ N\ A_0\ A_s))\ M) \\
& \equiv & ((\lambda x_1 \lambda h.\lambda y.(h\ (\mathsf{S}y))\ N\ (\mathsf{rec}\ N\ A_0\ A_s))\ M) \\
& \hookrightarrow & ((\mathsf{rec}\ N\ A_0\ A_s)\ (\mathsf{S}M))
\end{array}$$

3. en appelant α la fonction calculée par le terme A, complétez les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha(0,m) & = & \ldots \\ \alpha(n+1,m) & = & \ldots \end{array}\right.$$

Réponse: $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha(0,m) & = & m \\ \alpha(n+1,m) & = & \alpha(n,m+1) \end{array}\right.$

4. reconnaissez vous la fonction calculée par le terme A (ou la fonction α) ? Justifiez votre réponse, sans nécessairement donner une preuve complète.

Réponse: C'est l'addition : $\alpha(n,m) = n+m$ ou $(A\ (\mathsf{S}^n\mathsf{0})\ (\mathsf{S}^m\mathsf{0})) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n+m}\mathsf{0}$
On montre, par induction sur n que <u>pour tout terme M</u>, $(A\ (\mathsf{S}^n\mathsf{0})\ M) \hookrightarrow \mathsf{S}^n M$:
- si $n=0$, on a $(A\ \mathsf{0}\ M) \hookrightarrow M$ et $M = \mathsf{S}^0 M$;
- si $n = p+1$, l'hypothèse d'induction est <u>pour tout terme M</u>, $(A\ (\mathsf{S}^p\mathsf{0})\ M) \hookrightarrow (\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}^p\mathsf{0})\ A_0\ A_s) \hookrightarrow \mathsf{S}^p M$.
  On a que $(A\ (\mathsf{S}^{p+1}\mathsf{0})\ M) \hookrightarrow ((\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}^p\mathsf{0})\ A_0\ A_s) \hookrightarrow (\mathsf{S}M))$. On applique l'hypothèse d'induction, en instanciant le «M» de l'hypothèse d'induction par $\mathsf{S}M$, pour obtenir $((\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}^p\mathsf{0})\ A_0\ A_s) \hookrightarrow (\mathsf{S}M)) \hookrightarrow \mathsf{S}^p\mathsf{S}M \equiv \mathsf{S}^{p+1}M$.
  En prenant $M = \mathsf{S}^m\mathsf{0}$, on obtient donc que $(A\ \mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}) \hookrightarrow \mathsf{S}^m\mathsf{0} \equiv \mathsf{S}^{0+m}\mathsf{0}$ et $(A\ \mathsf{S}^{p+1}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}) \hookrightarrow \mathsf{S}^{p+1}\mathsf{S}^m\mathsf{0} \equiv \mathsf{S}^{p+1+m}\mathsf{0}$. Et donc, pour tout n et tout m : $(A\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0}) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n+m}\mathsf{0}$.