UNIVERSITÉ PIERRE & MARIE CURIE
LICENCE INFORMATIQUE

ALGORITHMIQUE I
1998-99

INTERROGATION ÉCRITE

Décembre *1998*

Corrigé

–o–

QUESTION 2 On rappelle qu'une liste $L =$ est un *tri topologique* des éléments de S si et seulement si pour tout arc $(x, y) \in A$, x est placé avant y dans L.

Si L est une liste, on rappelle que $x.L$ désigne la liste obtenue en rajoutant x devant L. Soit l'algorithme récursif LTOP :

Proc LTOP(s)
  Tant que s possède un successeur x non visité faire
    LTOP(x)
  Fin-tant-que
  $L \leftarrow s.L$
Fin-proc

Montrez que si $G = (S, A)$ est un graphe orienté sans cycle qui ne possède qu'une seule racine r et si L est vide au départ alors L contient un tri topologique de S aprés la terminaison de LTOP(r)

CORRIGÉ On montre, dans un premier temps que lorsqu'un sommet x est placé dans L, x n'a pas de prédécesseur dans L.

Soient x_1, .., x_k les prédécesseurs de x, soit x_i l'un d'eux. On raisonne pas cas suivant que LTOP(x_i) est appelé avant LTOP(x) ou non.

1. Si LTOP(x_i) est appelé avant LTOP(x) alors LTOP(x) est appelé dans la boucle "Tant que" de l'appel à LTOP(x_i) et x_i n'étant placé qu'en sortie de boucle dans L, il s'y retrouve avant x.
2. Si LTOP(x_i) est appelé aprés LTOP(x) c'est qu'il existe $j \in [1..i[$ tel que LTOP(x_j) est appelé avant LTOP(x_i). Au retour de LTOP(x_j), x est dans la liste L, il y est donc au moment de l'appel à LTOP(x_i) et x_i sera donc placé dans L avant x.

Puisque tous les prédécesseurs de x sont placés dans L avant x, et que L est vide au départ, L ne contient donc aucun prédécesseur de x lorsque celui-ci y est placé.

Puisque l'on suppose que L est vide au départ elle ne contient, au retour de LTOP(r) que des sommets placés par la suite des appels récursifs.
On remarque que la suite des appels récursifs à LTOP détermine un parcours en profondeur de G. D'où, puisque r est racine, tous les éléments de S sont dans L au retour de LTOP(r).
On obtient donc, en vertu de notre premier résultat, une énumération $s_1, .., s_n$ de S telle que pour tout $i, j \in [1..n]$, si $i > j$ alors $(x_i, x_j) \notin A$; c'est à dire, par contraposée, que si $(x_i, x_j) \in A$ alors $i < j$.

CQFD