Algorithmique numérique (LU3IN028)

Cours n°5 : Transformée de Fourier discrète

Stef Graillat

Sorbonne Université

Résumé du cours précédent

Résolution d'équations non linéaires :

- Méthode de dichotomie
- Méthode de Newton en dimension $n \geq 1$
- Méthode d'homotopie

Objectifs

Présenter l'algorithme de « Transformée de Fourier Rapide » (Fast Fourier Transform ou FFT)

Un des algorithmes les plus utilisés dans le monde avec des applications en

- traitement du signal
- traitement d'image
- calcul formel (multiplication de polynômes, de grands entiers, etc)

Plan du cours

1. Multiplication de polynômes et choix de représentation
2. Évaluation et interpolation
3. Racine n-ième de l'unité
4. Version matricielle de la FFT

Bibliographie

- Algorithms, S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou et U.V. Vazirani, McGraw Hill, 2006
- Algorithmique, Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest et Clifford Stein, 3e édition, Dunod, 2010
- The Art of Computer Programming, Volume 2 : Seminumerical Algorithms, Donald E. Knuth, 3e édition, Addison-Wesley, 1997
- Modern Computer Algebra, Joachim von zur Gathen et Jürgen Gerhard, 3e édition, Cambridge University Press, 2013
- Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing, William Press, Saul Teukolsky, William Vetterling et Brian Flannery, 3e édition, Cambridge University Press, 2007
- Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform, Charles Van Loan, SIAM, 1987

Multiplication de polynômes

Le produit de 2 polynômes de degré n est un polynôme de degré au plus $2n$

$$(1 + 2x + 3x^2) \cdot (2 + x + 4x^2) = 2 + 5x + 12x^2 + 11x^3 + 12x^4$$

Plus généralement, si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{et} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

alors $R(x) = P(x)Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{2n} x^{2n}$ avec

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Multiplication de polynômes (suite)

Algorithme 1 (Multiplication naïve)

```
function R = mult(P,Q)
    n = length(P);
    R = zeros(1,2*n-1);
    for i=1:n
        for j=1:n
            R(i+j-1) = R(i+j-1) + P(i)*Q(j);
        end
    end
```

Coût : $\mathcal{O}(n^2)$

Peut-on faire mieux que $\mathcal{O}(n^2)$?
→ algorithme de Karatsuba : $\mathcal{O}(n^{\log_2 3}) \approx \mathcal{O}(n^{1.58})$

Peut-on encore faire mieux ?

Changement de représentation (suite)

On représente généralement le polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

par le vecteur de ses coefficients $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$

Question : y-a-t'il d'autres représentations des polynômes ?

Définition 1

Un nombre complexe z est une racine de $P(x)$ si $P(z) = 0$

Théorème 1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme $P(x)$ de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines $z_1, \ldots, z_n$ (comptées avec leurs multiplicités). On a alors

$$P(x) = a_n(x - z_1)\cdots(x - z_n)$$

Changement de représentation (suite)

On peut donc représenter le polynôme $P(x)$ par a_n et ses racines $z_1, \ldots, z_n$.

Évaluation : P étant donné par a_n et $z_1, \ldots, z_n$, on peut évaluer P en x en $\mathcal{O}(n)$

Multiplication : P étant donné par a_n et $z_1, \ldots, z_n$ et Q étant donné par b_n et $z'_1, \ldots, z'_n$, PQ est donné par $a_n b_n, z_1, \ldots, z_n, z'_1, \ldots, z'_n$

Addition : difficile !

Changement de représentation (suite)

Théorème 2

Un polynôme de degré n est uniquement déterminé par ses valeurs sur $n+1$ points distincts.

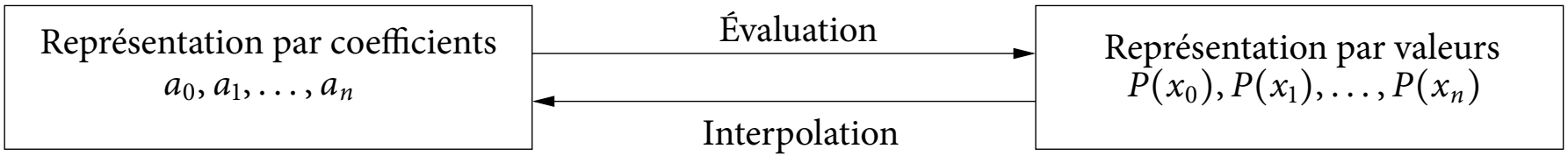
Fixons $n+1$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$. On peut spécifier un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ de degré n par l'une des façons suivantes :

1. ses coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$
2. les valeurs $P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)$

Il est facile de multiplier deux polynômes dont on connaît les valeurs. Le produit $R(z)$ en un point z est le produit de $P(z)$ par $Q(z)$!

Facile aussi pour l'addition !

L'algorithme de multiplication



Algorithme 2 (Mutliplication de polynômes)

Entrée : *2 polynômes P et Q de degré n donnés via leurs coefficients*
Sortie : *le polynôme $R = PQ$ donné via ses coefficients*

Sélection
Choisir des points $x_0, x_2, \ldots, x_{m-1}$ avec $m \geq 2n+1$

Évaluation
Calculer $P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_{m-1})$ et $Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_{m-1})$

Multiplication
Calculer $R(x_k) = P(x_k)Q(x_k)$ pour tout $k = 0, \ldots, m-1$

Interpolation
Retrouver $R(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{2n} x^{2n}$

Coût de l'algorithme

- Coût de la sélection : $\mathcal{O}(n)$
- Coût de la multiplication : $\mathcal{O}(n)$
- Qu'en est-il du coût de l'évaluation et de l'interpolation ?

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Évaluation par l'algorithme de Horner

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = ((((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \cdots)x + a_0$$

Algorithme 3 (Algorithme de Horner)

```
function res = Horner(P, x)
    s_n = a_n
    for i = n − 1 : −1 : 0
        s_i = s_{i+1} * x + a_i
    end
    res = s_0
```

Coût : $\mathcal{O}(n)$

Si n évaluations à faire $\rightarrow$ $\mathcal{O}(n^2)$

Interpolation de Lagrange

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) \left(\prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_j - x_i} \right)$$

Algorithme 4 (Algorithme d'interpolation de Lagrange)

```
function P = interp([(x_i, y_i)], x)
A=1 et P=0
for i=0:n-1
    A = A(x - x_i)
end
for i=0:n-1
    A_i = A/(x - x_i)
    q_i = A(x_i)
    P = P + y_i A_i / q_i
end
```

Coût : $O(n^2)$.

Multiplication en $O(n^2)$ opérations par évaluations et interpolation.

Évaluation en mode « diviser pour régner »

On suppose à partir de maintenant que n est une puissance de 2 ($n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$)

Idée : évaluer un polynôme $P(x)$ de degré $< n$ en n points par paire

$$\pm x_0, \pm x_1, \ldots, \pm x_{n/2-1}$$

car on peut recouper les calculs de $P(x_i)$ et $P(-x_i)$.

En effet, on peut séparer les puissances paires et impaires,

$$P(x) = P_p(x^2) + xP_i(x^2)$$

Exemple :

$$3 + 4x + 6x^2 + x^4 + 10x^5 = (3 + 6x^2 + x^4) + x(4 + 2x^2 + 10x^4)$$

Évaluation en mode « diviser pour régner » (suite)

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} P(x_i) &= P_p(x_i^2) + x_i P_i(x_i^2) \\ P(-x_i) &= P_p(x_i^2) - x_i P_i(x_i^2) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour évaluer $P(x)$ en n points $\pm x_0, \pm x_1, \ldots, \pm x_{n/2-1}$, il suffit d'évaluer $P_p(x)$ et $P_i(x)$ en $n/2$ points $x_0^2, \ldots, x_{n/2-1}^2$

Si on continue le procédé de manière récursive, le nombre $T(n)$ d'opérations arithmétiques vérifie

$$T(n) = 2T(n/2) + \mathcal{O}(n)$$

On montre alors que

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$$

Évaluation en mode « diviser pour régner » : vers la récursion

- On part de n points $\pm x_0, \pm x_1, \ldots, \pm x_{n/2-1}$
- Après une étape, on a $n/2$ points $x_0^2, \ldots, x_{n/2-1}^2$
- Pour continuer la récursion, on a besoin de

$$\{x_0^2, \ldots, x_{n/2-1}^2\} = \{\pm z_0, \pm z_1, \ldots, \pm z_{n/4-1}\}$$

- Si $z_0 = x_0^2$ et $-z_0 = x_j^2$ alors $x_0 = \pm i x_j$ avec $i^2 = -1$
- Pour continuer la récursion, on a besoin des nombres complexes !

Racine n-ième de l'unité

Il s'agit des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$!

Théorème 3

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont $\omega^j = e^{2ij\pi/n}$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Propriété 1

Si n est pair alors

- *les racines n-ième de l'unité sont par paire : $\omega^{n/2+j} = -\omega^j$*
- *les élever au carré produit les racines $n/2$-ième de l'unité*

Évaluation en les racines n-ième

Notons $\omega_n = e^{2i\pi/n}$

- Problème : évaluer P en les racines n-ième de l'unité
- On rappelle que

$$P(x) = P_p(x^2) + xP_i(x^2)$$

- On observe que $(\omega_n^j)^2 = \omega_{n/2}^j$
- Par conséquent

$$P(\omega_n^j) = P_p((\omega_n^j)^2) + xP_i((\omega_n^j)^2)$$

- Ainsi évaluer P en les racines n-ième de l'unité peut s'effectuer en évaluant P_p et P_i en les racines $n/2$-ième de l'unité

Évaluation en les racines n-ième (suite)

Algorithme 5 (Calcul de $FFT(P, \omega)$)

Entrée : *le polynôme P connu par ses coefficients de degré n avec n une puissance de 2 et ω une racine primitive n-ième de l'unité*
Sortie : *les valeurs de $P(\omega^0), P(\omega^1), \ldots, P(\omega^{n-1})$*

- *si $\omega = 1$ alors retourner $P(1)$*
- *exprimer $P(x)$ sous la forme $P(x) = P_p(x^2) + xP_i(x^2)$*
- *appeler $FFT(P_p, \omega^2)$ pour évaluer P_p en les puissances paires de ω*
- *appeler $FFT(P_i, \omega^2)$ pour évaluer P_i en les puissances paires de ω*
- *pour $j = 0 : n-1$*
  calculer $P(\omega^j) = P_p(\omega^{2j}) + \omega^j P_i(\omega^{2j})$
- *retourner $P(\omega^0), P(\omega^1), \ldots, P(\omega^{n-1})$*

Formulation matricielle

L'évaluation de $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ en n points $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ peut s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice M est une matrice de Vandermonde.

Propriété 2

Si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont des nombres distincts alors M est inversible.

L'évaluation est la multiplication par M et l'interpolation est la multiplication par M^{-1}

Formulation matricielle : évaluation en les racines n-ième

Évaluer en les racines n-ième revient à multiplier par

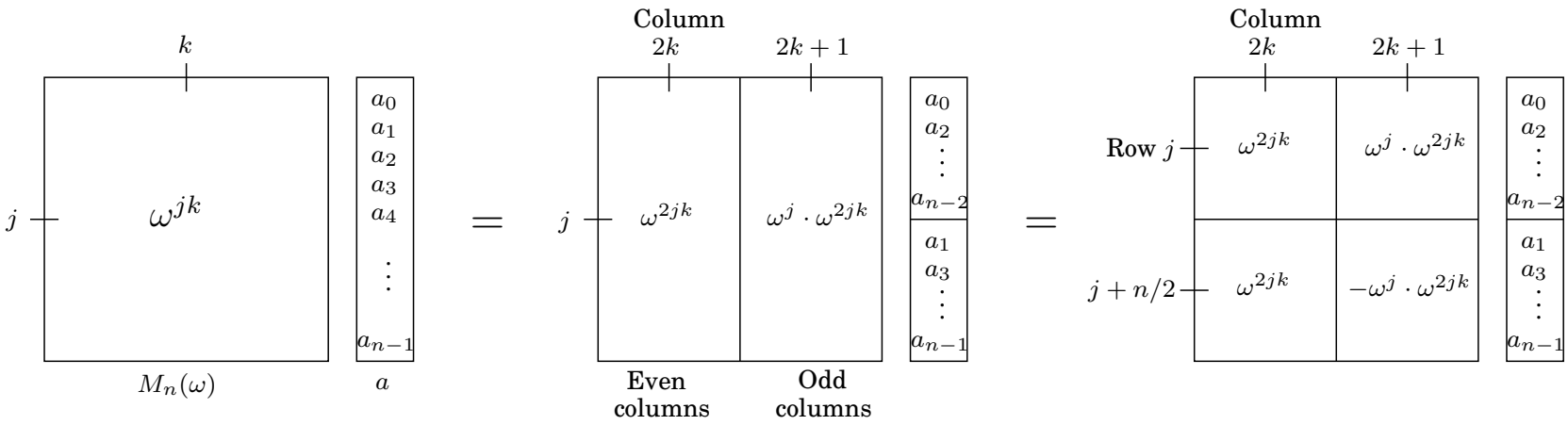
$$M_n(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ & & \vdots & & \\ 1 & \omega^j & \omega^{2j} & \cdots & \omega^{(n-1)j} \\ & & \vdots & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Théorème 4 (Formule d'inversion)

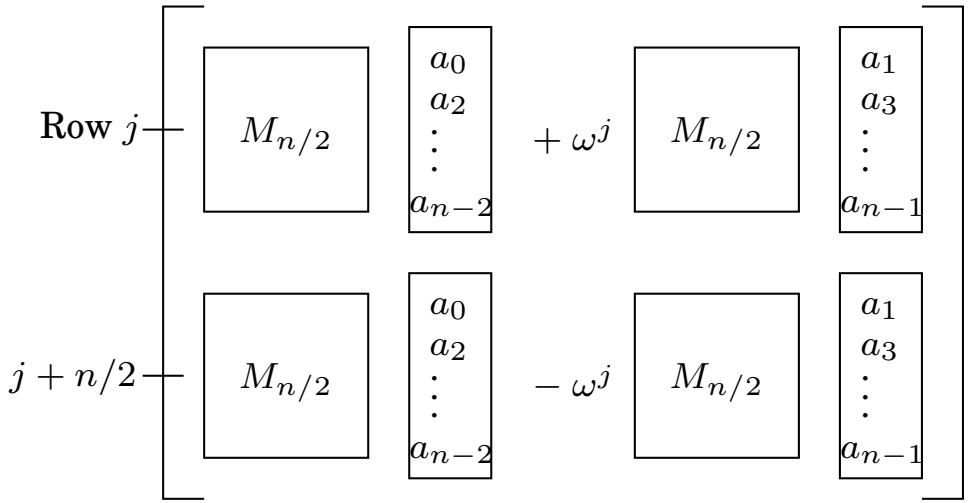
$$M_n(\omega)^{-1} = \frac{1}{n} M_n(\omega^{-1})$$

Algorithme « diviser pour régner » matriciel

L'algorithme « diviser pour régner » se voit de manière matricielle



Que l'on peut aussi voir comme



Algorithme de FFT

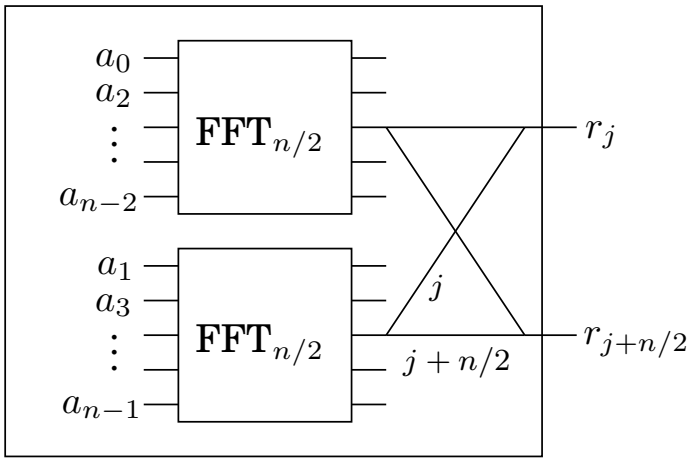
Algorithme 6 (Calcul de $FFT(a, \omega)$)

Entrée : *un tableau* $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ *avec* n *une puissance de 2 et* ω *une racine primitive* n*-ième de l'unité*
Sortie : $M_n(\omega)a$

si $\omega = 1$ *alors retourner* a
$(s_0, s_1, \ldots, s_{n/2-1}) = FFT((a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}), \omega^2)$
$(s'_0, s'_1, \ldots, s'_{n/2-1}) = FFT((a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}), \omega^2)$
pour $j = 0 : n/2 - 1$
$\quad r_j = s_j + \omega^j s'_j$
$\quad r_{j+n/2} = s_j - \omega^j s'_j$
retourner $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$

FFT version itérative

L'étape de récursion de l'algorithme de FFT peut se représenter par le circuit

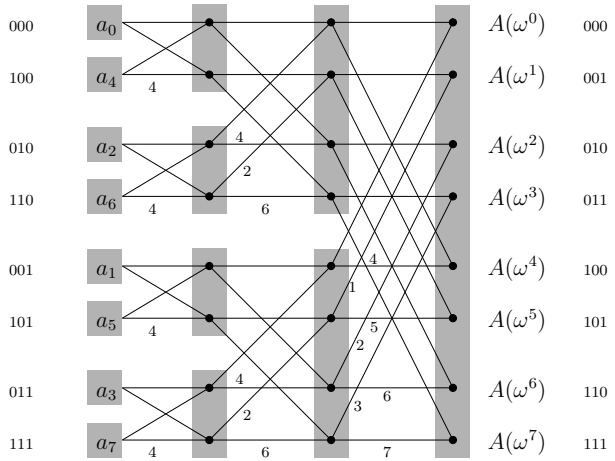


signifiant que

$$\begin{aligned} r_j &= s_j + \omega^j s'_j \\ r_{j+n/2} &= s_j - \omega^j s'_j \end{aligned}$$

FFT version itérative (suite)

Si on déroule la récursion pour le circuit avec $n = 8$, on obtient



- il a y $\log_2(n)$ niveaux chacun avec n noeuds pour un total de $n \log n$ opérations
- les entrées sont rangées dans un ordre particulier : 0,4,2,6,1,5,3,7

→ on remarque que les entrées sont rangées par ordre croissant des derniers bits de la représentation binaire de leurs indices !

L'ordre résultant en binaire est 000,100,010,110,001,101,011,111
il s'agit de l'ordre classique croissant 000,001,010,011,100,101,110,111 mais les bits sont inversés

Et ailleurs que dans $\mathbb{C}$? Corps finis !

L'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, p est premier. Il est en général noté $\mathbb{F}_p$.
Pour tout p premier et $r > 1$, il existe un corps à p^r éléments noté $\mathbb{F}_{p^r}$. Attention, ce n'est pas $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.
Le groupe des inversibles de $\mathbb{F}_{p^r}$ est un groupe cyclique à $p^r - 1$ éléments. Il admet donc les racines primitives $(p^r - 1)$-ièmes de l'unité.

Si $p^r = 2^k \times M + 1$, alors 1 admet une racine primitive 2^k-ième de l'unité, on peut y faire de la FFT !
Comme $17 - 1 = 2^4$, il existe des racines primivites 16-ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_{17}$ (6 et 11). On peut donc multiplier des polynômes dont le produit est de degré au plus 15 par FFT.
Comme $7937 - 1 = 2^8 \times 31$, on peut faire de la FFT dans $\mathbb{F}_{7937}$ pour multiplier des polynômes dont le produit est de degré au plus 255.

Les inventeurs de la FFT

Gauss, Carl Friedrich, « Nachlass : Theoria interpolationis methodo nova tractata », Werke, Band 3, 265-327 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866)

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Les inventeurs de la FFT (suite)

James W. Cooley, and John W. Tukey, « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series », Math. Comput. 19, 297-301 (1965)

James Cooley (1926-)

John Tukey (1915-2000)

Outils logiciels

La FFT est implantée dans bon nombre d'outils pour le calcul scientifique.

- en MATLAB, il faut utiliser la commande `fft` pour la FFT et la commande `ifft` pour la transformée de Fourier inverse
- il existe un code très efficace en C pour calculer des FFT : FFTW (`http://www.fftw.org/`)

Complexités principales des algorithmes de multiplication

nom	complexité dans $\mathbb{Z}$	complexité dans $\mathbb{K}[x]$
naïf	$O(n^2)$	
Karatsuba	$O(n^{\log_2 3})$	
Toom-Cook	$O(n^{2\log(2k-1)/\log k}),\ k \geq 2$	
Schönhage – Strassen	$O(n \log n \log\log n)$	
Cantor – Kaltofen		$O(n \log n \log\log n)$
Fürer	$O(n \log n\, 2^{\Theta(\log^* n)})$	
Harvey *et al.*	$O(n \log n\, 8^{\log^* n})$	$O(n \log n\, 8^{\log^* n}), \mathbb{K} = \mathbb{F}_p$
Cooley – Tukey (FFT)		$O(n \log n)$

Conclusion

- un algorithme très efficace (en $\mathcal{O}(n \log n)$)
- des applications dans de nombreux domaines (imagerie, traitement du signal, calcul formel, théorie des nombres, etc)
- il existe d'autres algorithmes que celui de Cooley-Tukey
- si les données sont réelles, on utilise plutôt une transformée en cosinus discret