Algorithmique numérique (3I028)

Examen du 9 janvier 2019

Seul le polycopié de cours est autorisé - Durée : 2h00

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (Erreur d'arrondi (3 points))**.** Soit x un nombre flottant double précision IEEE 754 vérifiant $1 \leq x < 2$. On note $\mathbf{u} = 2^{-53}$ l'unité d'arrondi en double précision et $\mathrm{fl}(\cdot)$ l'arrondi au plus près.

1. Quel est la distance entre deux nombres flottants (en double précision) consécutifs dans l'intervalle $]1/2, 1]$? En déduire une majoration de $|1/x - \mathrm{fl}(1/x)|$.
2. Montrer que $\mathrm{fl}(x \times \mathrm{fl}(1/x))$ vaut soit 1 soit $1 - \mathbf{u}$.

Exercice 2 (Optimisation (4 points))**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy + x + y + 10.$$

1. Cette fonction est-elle quadratique ? Justifiez.
2. Cette fonction est-elle convexe ? Justifiez.
3. On considère le problème d'optimisation $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$. Que peut-on dire de ce problème ?
4. Le résoudre.

Exercice 3 (Optimisation (4 points))**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c,$$

avec A une matrice symétrique définie positive de taille $n \times n$, b un vecteur de taille n et c un scalaire.

1. Montrer que la méthode de Newton pour minimiser f converge en une seule itération pour n'importe quel point initial x_0.
2. Si on utilise une méthode de descente pour minimiser f, que se passe-t'il si le point initial x_0 est tel que $x_0 - x^*$ soit un vecteur propre de A où x^* est la solution du problème de minimisation ?

Exercice 4 (Transformée de Fourier (3 points))**.**

1. On souhaite multiplier les deux polynômes $A(x) = 3 - x + 4x^2 + 2x^3$ et $B(x) = -2x^2 + x^3$ en utilisant la FFT. En quels points devons-nous évaluer ces polynômes ?
2. Supposons que la FFT d'un polynôme $C(x)$ de degré inférieur ou égal à 3 en les racines 4e de l'unité soit le vecteur $(1, 1, 1, 1)$. Quel est le polynôme $C(x)$?

Exercice 5 (Systèmes linéaires (6 points))**.** On considère le système linéaire $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. On suppose que l'on peut écrire $A = M - N$ avec M symétrique définie positive (SDP) et N symétrique. On suppose aussi que $\lambda_{\min}(M) > \rho(N)$. On rappelle que $\lambda_{\min}$ représente la plus petite valeur propre et ρ le rayon spectral. On souhaite étudier la convergence du schéma $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ pour résoudre le système $Ax = b$.

1. Montrer que si A est SDP alors A^{-1} est aussi SDP.

2. Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques alors $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.
Indication : on pourra utiliser le fait que pour une matrice symétrique A, on a $\rho(A) = \|A\|_2$.

3. Rappeler une condition suffisante sur M et N pour que le schéma $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ converge.

4. Montrer que le schéma $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ converge quel que soit le point initial x_0.