Algorithmique numérique (3I028)

Partiel du 8 novembre 2018

Seul le polycopié de cours est autorisé - Durée : 1h30

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (Stabilité numérique (3 points))**.** On considère le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $a, b > 0$. On suppose que $a \approx b$.

1. Quelle est la difficulté pour résoudre numériquement ce problème ? Justifiez.
2. Proposer une formule numériquement stable pour calculer $z = x + y$ étant donnés a et b.

Exercice 2 (Optimisation (6 points))**.** Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, admettent-elles des extrema locaux ? Si oui, préciser leurs coordonnées et leur nature :

1. $f_1(x, y) = xy - y + x + 1$;
2. $f_2(x, y) = x^4/4 - 2x^2 + y^2 - 4y$.

Exercice 3 (Optimisation avec contrainte (3 points))**.** Déterminer les points critiques du Lagrangien pour le problème d'optimisation sous contrainte

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ sous la contrainte } g(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Exercice 4 (Optimisation (4 points))**.** Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ avec $n < m$ telle que $A^T A$ soit inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. On considère $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|Ax - b\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer le gradient et la hessienne de la fonction f.
2. Montrer que les minima x^* solution du problème

   $$f(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^m} f(x)$$

   vérifient $A^T A x^* = A^T b$.
3. Résoudre le problème d'optimisation précédent.

Exercice 5 (Systèmes non linéaires (4 points))**.** Soit le système linéaire $Ax = b$ de taille $n \times n$. On modifie l'équation de la manière suivante : pour tout $i = 1, \ldots, n$, la valeur b_i du second membre est remplacée par $b_i - x_i^3$. On obtient alors un système d'équations non-linéaires.

1. Calculer la matrice jacobienne du nouveau système.
2. Dans la suite, on suppose que A est à diagonale strictement dominante. Montrer que A est inversible. On rappelle que A est à diagonale strictement dominante si pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.
3. On utilise l'iteration de Newton pour résoudre le système non-linéaire. Expliquer pourquoi la matrice jacobienne à chaque itération de Newton est inversible.