1. TD

Exercice 1 (Matrice à diagonale dominante)**.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients complexes.

1. On dit que A est à *diagonale strictement dominante* si pour tout $i = 1 : n$, on a

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

   Montrer que si A est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.

2. Que pouvez-vous dire de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}?$$

Exercice 2 (Convergence de la méthode de Jacobi)**.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et b un vecteur de taille n. On notera D la matrice constituée de la diagonale de A.

1. Montrer que si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge quel que soit le vecteur initial x_0.
2. Soit A une matrice symétrique définie positive avec $A = M - N$ (avec M matrice inversible). On suppose aussi que $M^T + N$ est symétrique définie positive. Montrer que la méthode itérative

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b$$

   converge vers la solution du système $Ax = b$.
3. En déduire que si A et $2D - A$ sont symétriques définies positives, alors la méthode de Jacobi converge.

Exercice 3. Montrer que la méthode SOR peut converger seulement si $\omega \in]0, 2[$.

Exercice 4 (Algorithme du gradient conjugué)**.** On utilise les notations vues en cours pour l'algorithme du gradient conjugué. Montrer que l'on a

1. $p_k^T r_0 = p_k^T r_k$;
2. $p_i^T r_j = 0$ pour $i < j$;
3. $p_k^T r_k = r_k^T r_k$;
4. $r_i^T r_j = 0$ pour $i \neq j$.

2. TME

Exercice 5. Implémenter les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR et du gradient conjugé. Comparer les performances de ces algorithmes.