Université Pierre-et-Marie-Curie | Année 2012 – 2013
MI077 | Automne

MODÉLISATION ET RÉSOLUTIONS NUMÉRIQUE ET SYMBOLIQUE
***VIA* LES LOGICIELS MAPLE ET MATLAB (MODEL)**

Exercice 1. 1. On a $P = X^3 + 6X^2 - 16$ et $P' = 3X^2 + 12X$. On remarque les racines de P' sont 0 et -4, qui ne sont pas racines de P, donc les polynômes sont premiers entre eux. On applique l'algorithme de Sturm : $P_0 = P$, $P_1 = P'$, $P_2 = -\operatorname{rem}(P_0, P_1) = 8X + 16$, $P_3 = -\operatorname{rem}(P_1, P_2) = 12$.

On a $P_0(-1) = -11$, $P_1(-1) = -9$, $P_2(-1) = 8$, $P_3(-1) = 12$, il y a donc 1 changement de signes.

On a $P_0(3) = 65$, $P_1(3) = 63$, $P_2(3) = 40$, $P_3(3) = 12$, il y a donc 0 changement de signes.

Par conséquent, il y a 1 racine de P dans $]-1; 3[$.

2. On a $P = X^5 + 5X^3 + 6$ et $P' = 5X^4 + 15X^2$. On applique l'algorithme de Sturm : $P_0 = P$, $P_1 = P'$, $P_2 = -\operatorname{rem}(P_0, P_1) = -2X^3 - 6$, $P_3 = -\operatorname{rem}(P_1, P_2) = -15X^2 + 15X$, $P_4 = -\operatorname{rem}(P_2, P_3) = 2X + 6$ et $P_5 = -\operatorname{rem}(P_3, P_4) = 180$. On peut noter que comme le dernier reste non nul est constant, P et P' sont bien premiers entre eux.

On a $P_0(-2) = -66$, $P_1(-2) = -12$, $P_2(-2) = 10$, $P_3(-2) = -90$, $P_4(-2) = 2$, $P_5(-2) = 180$, il y a donc 3 changement de signes.

On a $P_0(2) = 78$, $P_1(2) = 36$, $P_2(2) = -22$, $P_3(2) = -30$, $P_4(2) = 10$, $P_5(2) = 180$, il y a donc 2 changement de signes.

Par conséquent, il y a 1 racine de P dans $]-2; 2[$.

3. Comme 2, 3 et 5 sont premiers, ils sont premiers entre eux. Par le théorème de restes chinois, le système a des solutions.

L'inverse de 15 modulo 2 est 1, l'inverse de 10 modulo 3 est 1, l'inverse de 6 modulo 5 est 1.

Donc les solutions du système sont les

$$\begin{aligned} 1 \times 1 \times 15 + 1 \times 1 \times 10 + 2 \times 1 \times 6 + 30k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 37 + 30k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 7 + 30k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. On résout le système linéaire suivant par la méthode Gauss :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \quad L_2 + L_1 \\ 2x - y + z = 3 \quad L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2z = 0 \\ -3y - z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + \frac{z}{3} = -3 \\ 2z = 0. \end{cases}$$

D'où $S = \{(1, 2, 3)\}$.

5. Par interpolation de Lagrange, on trouve

$$\begin{aligned} f(X) &= -1\frac{(X+1)(X-1)}{(-1)(0+1)} + 1\frac{X(X-1)}{(-1-0)(-1-1)} - 1\frac{X(X+1)}{(1-0)(1+1)} \\ &= X^2 - 1 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &= X^2 - X - 1. \end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Comme le terme $P_1(X) \cdots P_n(X)$ apparaît dans le déterminant de M_n, on sait que ce déterminant est un polynôme de degré nd. On utilise la méthode d'évaluation-interpolation.

On fixe $nd + 1$ valeurs de X, on calcule le déterminant de la matrice correspondante en $O(n^3)$ opérations dans $\mathbb{K}$ puis on interpole le déterminant. Par conséquent le calcul du déterminant peut se faire en $O((nd + 1)n^3) = O(n^4 d)$ opérations dans $\mathbb{K}$ puisque l'interpolation n'est pas dominante.

2. On calcule le polynôme caractéristique par évaluation-interpolation. C'est un polynôme de degré n en λ. On se donne donc $n+1$ valeurs de λ puis on calcule le déterminant de la matrice correspondante par la méthode de la question précédente. Enfin, on interpole le polynôme.

   Ceci nous donne un coût en $O((n+1)n^4 d) = O(n^5 d)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3. 1. Le résultant de A et de B vus comme des polynômes en Y est le déterminant de la matrice de Sylvester $S_{A,B}$ vus comme des polynômes en Y. C'est lui-même un polynôme en X et on a

$$S_{A,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ P(X) & 1 & Q(X) & 1 \\ Q(X) & P(X) & P(X) & Q(X) \\ 0 & Q(X) & 0 & P(X) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{A,B}(X) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ P(X) & 1 & Q(X) & 1 \\ Q(X) & P(X) & P(X) & Q(X) \\ 0 & Q(X) & 0 & P(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & Q(X) & 1 \\ P(X) & P(X) & Q(X) \\ Q(X) & 0 & P(X) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P(X) & 1 & 1 \\ Q(X) & P(X) & Q(X) \\ 0 & Q(X) & P(X) \end{vmatrix} \\
&= -Q(X)(P(X)^2 - Q(X)^2) + P(X)(P(X) - Q(X)) \\
&\quad + P(X)(P(X)^2 - Q(X)^2) - Q(X)(P(X) - Q(X)) \\
&= (P(X) - Q(X))^2 (P(X) + Q(X)) + (P(X) - Q(X))^2 \\
&= (P(X) - Q(X))^2 (P(X) + Q(X) + 1).
\end{aligned}$$

2. Le système admet une solution en (x, y) si, et seulement si, $\mathrm{Res}_{A,B}(x) = 0$, si, et seulement si, $P(x) - Q(x) = 0$ ou $P(x) + Q(x) + 1 = 0$.
3. Si $P(X) = X^4$ et $Q(X) = 2X^2$, alors, de la question précédente, on en déduit que si (x, y) est solution de (S) alors $x^4 - 2x^2 = 0$ ou $x^4 + 2x^2 + 1$.

   La première équation nous donne $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$, tandis que la seconde nous donne $x = \pm i$. En réinjectant dans le système (S) les x trouvés, on obtient

$$(S_0) = \begin{cases} y^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \iff y = 0,$$

$$(S_{\sqrt{2}}) = \begin{cases} y^2 + 4y + 4 = 0 \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \iff y = -2,$$

$$(S_{-\sqrt{2}}) = \begin{cases} y^2 + 4y + 4 = 0 \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \iff y = -2.$$

   Donc les solutions réelles du système sont $(0, 0)$ et $(\pm\sqrt{2}, -2)$.

   En ce qui concerne les solutions complexes, en plus des précédentes, on a

$$(S_i) = \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y+2)(y-1) = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \iff y = 1,$$

$$(S_{-i}) = \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y+2)(y-1) = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \iff y = 1.$$

   Donc les solutions complexes du système sont $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, -2)$ et $(\pm i, 1)$.