Université Pierre-et-Marie-Curie Année 2012 – 2013

MODÉLISATION ET RÉSOLUTIONS NUMÉRIQUE ET SYMBOLIQUE *VIA* LES LOGICIELS MAPLE ET MATLAB (MODEL)

Les documents de cours sont auorisés. Tout appareil électronique doit être rangé dans vos sacs, ceux-ci doivent être déposés au sol.

Il vous est proposé 3 exercices sur 30 points. Le nombre de points obtenus constituera votre note sur 20.

Exercice 1 (Exercices calculatoires (10 points))**.**

2 points: Donner le nombre de racines distinctes de X^3+6X^2-16 dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-1,3[$.

2 points: Donner le nombre de racines distinctes de X^5+5X^3+6 dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-2,2[$.

2 points: Résoudre le système $X=1 \mod 2, X=1 \mod 3, X=2 \mod 5$.

2 points: Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ -x-y+z &= 0 \\ 2x-y+z &= 3 \end{cases}$$

Vous utiliserez l'algorithme de Gauss.

2 points: Trouver un polynôme f de degré ≤ 2 tel que

$$f(0)=-1 \quad f(-1)=1, \quad f(1)=-1.$$

.

Exercice 2 (Déterminants (6 points))**.** On considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de matrices de taille $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ suivantes

$$\begin{pmatrix} P_1(X) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & P_2(X) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & P_n(X) \end{pmatrix},$$

avec $\deg P_1 = \cdots = \deg P_n = d$.

1. Donner et justifier une complexité polynomiale du calcul du déterminant de B_n en fonction de n et de d.
2. Donner et justifier une complexité polynomiale du calcul du polynôme caractéristique de B_n en fonction de n et de d.

Exercice 3 (Systèmes bi-variés (12 points))**.** Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ deux polynômes. On considère les polynômes $A=Y^2+P(X)Y+Q(X)$ et $B=Y^2+Q(X)Y+P(X)$ dans $\mathbb{K}[X][Y]$.

1. Calculer le résultant de A et de B vus comme des polynômes en Y.
2. En déduire que le système

$$(S)=\begin{cases} Y^2+P(X)Y+Q(X) &= 0 \\ Y^2+Q(X)Y+P(X) &= 0 \end{cases}$$

admet une solution (x,y) si, et seulement si, $P(x)=Q(x)$ ou $P(x)+Q(x)=-1$.

3. On suppose que $P=X^4$ et $Q=2X^2$. Calculer toutes les solutions de (S) dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.