Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

Examen réparti n°2 du 10 janvier 2013

Seuls les documents de cours/TD et les notes de cours/TD sont autorisés - Durée 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

Exercice 1 (Décomposition LUP (4 points))**.** Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

et b le vecteur

$$b = \begin{pmatrix} 26 \\ 9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A peut se décomposer en utilisant un pivotage partiel en

$$PA = LU,$$

où U est triangulaire supérieure, L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et P une matrice de permutation. Donner les matrices U, L et P.

2. En déduire une solution du système $Ax = b$.

3. Donner la valeur du déterminant de A.

Exercice 2 (Décomposition QR (3 points))**. 1.** Donner une matrice orthogonale G et un nombre w tel que

$$G\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A = U\Sigma V^*$ la SVD d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Donner une base orthogonale pour l'image de A.

Exercice 3 (Méthode de la puissance inverse (5 points))**.** Le but de cet exercice est d'étudier un algorithme calculant la valeur propre la plus proche d'une valeur σ d'une matrice ainsi qu'un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$i = 0$
repeter
  $y_{i+1} = (A - \sigma I)^{-1} x_i$
  $x_{i+1} = y_{i+1} / \| y_{i+1} \|$
  $\widetilde{\lambda}_{i+1} = x_{i+1}^T A x_{i+1}$
  $i = i + 1$
jusqu'a convergence

On supposera que la matrice A est diagonalisable et peut s'écrire sous la forme $S\Lambda S^{-1}$ avec Λ diagonale (et que les valeurs propres sont toutes différentes). On appelera λ_k la valeur propre de A la plus proche de σ et on note s_i la i-ième colonne de S

1. Montrer que $(A-\sigma I)^{-1}$ a les mêmes vecteurs propres s_i que A correspondant aux valeurs propres $(\lambda_i - \sigma)^{-1}$.

2. Montrer que x_i converge vers s_k et que $\widetilde{\lambda}_i$ converge vers λ_k.

Exercice 4 (Générateur aléatoire (4 points))**.** **1.** Écriver une fonction MATLAB qui génére un nombre aléatoire dans $\{0,1,2\}$ vérifiant :
- la probabilité que ce nombre soit 0 est $0,2$,
- la probabilité que ce nombre soit 1 est $0,3$.
- la probabilité que ce nombre soit 2 est $0,5$.

Vous utiliserez la fonction `rand` qui génère un nombre aléatoire uniformé distribué dans $[0,1]$.

2. Soit le programme MATLAB suivant :

```
mu = 10;
U = rand(1);
X = -log(U)*mu
```

Donner la loi de la variable X. Vous donnerez en particulier la densité de la loi de X. Vous veillerez à justifier rigoureusement vos réponses.

Exercice 5 (Calcul formel (4 points))**.** Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. Montrer que si $P = k \mod (X^2+1)$, avec $k \in \mathbb{R}$, alors $P = k \mod (X-i)$ et $P = k \mod (X+i)$.
2. Déterminer tous les polynômes réels P tels que

$$\begin{cases} P = 2 \mod (X^2+1) \\ P = 4 \mod (X-1). \end{cases}$$

3. Sans faire les calculs, expliquer comment trouver l'unique P de degré inférieur ou égal à 5 tel que

$$\begin{cases} P = 1 \mod (X^4-1) \\ P = 2 \mod (X^2-2). \end{cases}$$