

Seuls les documents de cours/TD et les notes de cours/TD sont autorisés - Durée 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

Exercice 1 (Décomposition LUP (4 points)). Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

et b le vecteur

$$b = \begin{pmatrix} 26 \\ 9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A peut se décomposer en utilisant un pivotage partiel en

$$PA = LU,$$

où U est triangulaire supérieure, L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et P une matrice de permutation. Donner les matrices U , L et P .

2. En déduire une solution du système $Ax = b$.

3. Donner la valeur du déterminant de A .

Solution:

1. En utilisant l'algorithme du cours, on trouve que $PA = LU$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déroulant l'algorithme de Gauss vu en cours, on trouve que la solution du système $Ax = b$ est

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Comme $PA = LU$, on déduit que $\det(P) \det(A) = \det(L) \det(U)$. Le déterminant d'une matrice triangulaire étant le produit des éléments diagonaux et P étant une matrice de transposition (donc de déterminant -1), on en déduit que $\det(A) = 20$.

Exercice 2 (Décomposition QR (3 points)). 1. Donner une matrice orthogonale G et un nombre w tel que

$$G \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A = U\Sigma V^*$ la SVD d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Donner une base orthogonale pour l'image de A .

Solution:

1. On calcule la matrice de Givens avec

$$c = \frac{5}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{5}{13} \quad \text{et} \quad s = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{12}{13}$$

Par conséquent,

$$G = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ -12/13 & 5/13 \end{pmatrix},$$

et $w = 13$.

2. Une base orthogonale de $\text{Im}(A)$ sont les colonnes de U correspondant aux valeurs singulières non nulles de A . En effet, comme $AV = \Sigma U$, toute colonne associée à une valeur singulière non nulle de U est dans $\text{Im}(A)$. De plus, pour tout vecteur x , on a

$$Ax = U\Sigma V^* x = \sum_{j=1}^n u_j (\Sigma V^* x)_j = \sum_{\sigma_j > 0} u_j (\Sigma V^* x)_j.$$

Donc tout vecteur de $\text{Im}(A)$ s'écrit comme combinaison linéaire de colonnes de U associées aux valeurs singulières non nulles. Les colonnes de U associées aux valeurs singulières non nulles forment donc une famille génératrice de $\text{Im}(A)$ et comme elles sont libres (car orthogonales), elles forment une base de cet espace.

Exercice 3 (Méthode de la puissance inverse (5 points)). Le but de cet exercice est d'étudier un algorithme calculant la valeur propre la plus proche d'une valeur σ d'une matrice ainsi qu'un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$i = 0$

repete

$$y_{i+1} = (A - \sigma I)^{-1} x_i$$

$$x_{i+1} = y_{i+1} / \|y_{i+1}\|$$

$$\tilde{\lambda}_{i+1} = x_{i+1}^T A x_{i+1}$$

$$i = i + 1$$

jusqu'à convergence

On supposera que la matrice A est diagonalisable et peut s'écrire sous la forme $S\Lambda S^{-1}$ avec Λ diagonale (et que les valeurs propres sont toutes différentes). On appellera λ_k la valeur propre de A la plus proche de σ et on note s_i la i -ième colonne de S

1. Montrer que $(A - \sigma I)^{-1}$ a les mêmes vecteurs propres s_i que A correspondant aux valeurs propres $(\lambda_i - \sigma)^{-1}$.
2. Montrer que x_i converge vers s_k et que $\tilde{\lambda}_i$ converge vers λ_k .

Solution:

1. Comme $A = S\Lambda S^{-1}$, on en déduit que $A - \sigma I = S\Lambda S^{-1} - \sigma I = S(\Lambda - \sigma I)S^{-1}$. Par conséquent, $(A - \sigma I)^{-1} = S(\Lambda - \sigma I)^{-1}S^{-1}$. Il en résulte que $(A - \sigma I)^{-1}$ a les mêmes vecteurs propres s_i que A correspondant aux valeurs propres $(\lambda_i - \sigma)^{-1}$.
2. Comme λ_k est la valeur propre de A la plus proche de σ , on en déduit que $(\lambda_k - \sigma)^{-1}$ est la plus grande valeur propre en valeur absolue de $(A - \sigma I)^{-1}$. En conséquence, l'algorithme n'est rien d'autre que celui de la puissance itérée sur la matrice $(A - \sigma I)^{-1}$. Si on écrit $x_0 = S[\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ en supposant que $\alpha_k \neq 0$, on a

$$(A - \sigma I)^{-i} x_0 = (S(\Lambda - \sigma I)^{-i} S^{-1}) S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1 (\lambda_1 - \sigma)^{-i} \\ \vdots \\ \alpha_n (\lambda_n - \sigma)^{-i} \end{pmatrix} = \alpha_k (\lambda_k - \sigma)^{-i} S \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_k} \left(\frac{\lambda_k - \sigma}{\lambda_1 - \sigma} \right)^i \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \left(\frac{\lambda_k - \sigma}{\lambda_n - \sigma} \right)^i \end{pmatrix},$$

où le 1 est en position k . Comme $|(\lambda_k - \sigma)/(\lambda_i - \sigma)| < 1$, le vecteur entre parenthèse converge vers e_k et donc $(A - \sigma I)^{-i} x_0$ converge vers un multiple de $S e_k = s_k$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k . Par conséquent, $\tilde{\lambda}_{i+1} = x_{i+1}^T A x_{i+1}$ converge vers $s_k^T A s_k = \lambda_k$.

Exercice 4 (Générateur aléatoire (4 points)). 1. Écrire une fonction MATLAB qui génère un nombre aléatoire dans $\{0, 1, 2\}$ vérifiant :

- la probabilité que ce nombre soit 0 est 0,2,
- la probabilité que ce nombre soit 1 est 0,3.
- la probabilité que ce nombre soit 2 est 0,5.

Vous utiliserez la fonction `rand` qui génère un nombre aléatoire uniformément distribué dans $[0, 1]$.

2. Soit le programme MATLAB suivant :

```
mu = 10;
U = rand(1);
X = -log(U)*mu
```

Donner la loi de la variable X . Vous donnerez en particulier la densité de la loi de X . Vous veillerez à justifier rigoureusement vos réponses.

Solution:

```
1. z = rand(1);
   if (z < 0.2)
       y = 0;
   else
       if (z < 0.5)
           y = 1;
       else
           y = 2;
       end
   end
```

2. Notons $F(x) = P(X \leq x)$. On a

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\log(U)\mu \leq x) = P(U \geq e^{-x/\mu}) = 1 - e^{-x/\mu}.$$

On en déduit que $f(x) = F'(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$. Par conséquent X suit une loi exponentielle de paramètre μ .

Exercice 5 (Calcul formel (4 points)). Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. Montrer que si $P = k \pmod{X^2 + 1}$, avec $k \in \mathbb{R}$, alors $P = k \pmod{X - i}$ et $P = k \pmod{X + i}$.
2. Déterminer tous les polynômes réels P tels que

$$\begin{cases} P = 2 \pmod{X^2 + 1} \\ P = 4 \pmod{X - 1}. \end{cases}$$

3. Sans faire les calculs, expliquer comment trouver l'unique P de degré inférieur ou égal à 5 tel que

$$\begin{cases} P = 1 \pmod{X^4 - 1} \\ P = 2 \pmod{X^2 - 2}. \end{cases}$$

Solution:

1. Si $P = k \pmod{X^2 + 1}$, alors il existe Q tel que

$$P = Q \cdot (X^2 + 1) + k = (Q \cdot (X + i))(X - i) + k = (Q \cdot (X - i))(X + i) + k,$$

donc $P = k \pmod{X - i}$ et $P = k \pmod{X + i}$.

2. Par interpolation de Lagrange, cela revient à chercher tous les polynômes P tels que

$$\begin{cases} P(i) = 2 \\ P(-i) = 2 \\ P(1) = 4. \end{cases}$$

Après calcul, on trouve qu'il existe un polynôme Q tel que $P = X^2 + 3 + Q \cdot (X^2 + 1)(X - 1)$.

3. De manière analogue à la question 1, on montre que $P = 1 \pmod{X - 1}$, $P = 1 \pmod{X + 1}$, $P = 1 \pmod{X - i}$, $P = 1 \pmod{X + i}$, $P = 2 \pmod{X - \sqrt{2}}$, $P = 2 \pmod{X + \sqrt{2}}$. Il suffit ensuite d'interpoler un tel polynôme, avec ces 6 points, ce qui nous assure qu'il en existe un unique de degré au plus 5.