Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

Examen de rattrapage du 16 mai 2013

Seuls les documents de cours/TD et les notes de cours/TD sont autorisés - Durée 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

Exercice 1 (Décomposition LUP (5 points))**.** Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

et b le vecteur

$$b = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant une décomposition LUP de A avec pivotage partiel, résoudre le système $Ax = b$. Donner le déterminant de la matrice A.

Exercice 2 (Matrice à diagonale dominante (4 points))**.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients complexes.

1. On dit que A est à *diagonale strictement dominante* si pour tout $i = 1 : n$, on a

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.

2. Que pouvez-vous dire de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Monte Carlo (3 points))**.** Calculer la loi de la variable aléatoire X simulée par l'algorithme suivant (la valeur de $p \in [0, 1]$ et la fonction `rand` étant données).

```
X = 0
Faire
    U = rand(1)
    X = X + 1
Tant que (U < p)
Retourner X
```

Donner l'espérance de cette variable X.

Indication : vous pourrez calculer la probabilité $P(X = n)$ en fonction de p et de n.

Exercice 4 (Calcul (4 points))**. 1.** Par la méthode d'évaluation – interpolation, calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le nombre de racines réelles de $P = x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 9$, puis le nombre de racines strictement positives et le nombre de racines strictement négatives.

3. Calculer le discriminant de $Q = x^3 + 4x^2 - x + 8$. En déduire que Q a une racine multiple modulo 19 mais que des racines simples modulo 5.

Exercice 5 (Complexité (4 points))**.** Soient $p_1, \ldots, p_n$, n nombres premiers tels que $p_1 < \cdots < p_n$. Le but de l'exercice est d'interpoler un polynôme F de degré au plus d modulo $p_1 \cdots p_n$ avec $d < p_1$.
Soient $x_0, \ldots, x_d \in \{0, \ldots, p_1 - 1\}$ tous distincts. Pour tout j, soient $a_{0,j}, \ldots, a_{d,j}$ tels que

$$\forall i, F(x_i) = a_{i,j} \mod p_j.$$

1. Donner la complexité pour calculer F_{p_j} l'unique polynôme de degré au plus d à coefficients dans $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i, F_{p_j}(x_i) = a_{i,j} \mod p_j.$$

2. On note $f_{p_i,k}$ le coefficient de F_{p_i} de degré k. Donner la complexité pour calculer $f_k \in \mathbb{Z}/p_1 \cdots p_n\mathbb{Z}$ tel que $\forall i, f_k = f_{p_i,k} \mod p_i$.

3. Justifier que le polynôme $F(x) = f_d x^d + \cdots + f_0$ est solution du problème.

4. Donner la complexité globale pour calculer F.