

Seuls les documents de cours/TD et les notes de cours/TD sont autorisés - Durée 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

Exercice 1 (Décomposition LUP (5 points)). Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

et b le vecteur

$$b = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant une décomposition LUP de A avec pivotage partiel, résoudre le système $Ax = b$. Donner le déterminant de la matrice A .

Solution:

1. En utilisant l'algorithme du cours, on trouve que $PA = LU$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -11 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 73 \end{pmatrix}.$$

2. En déroulant l'algorithme de Gauss vu en cours, on trouve que la solution du système $Ax = b$ est

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Comme $PA = LU$, on déduit que $\det(P) \det(A) = \det(L) \det(U)$. Le déterminant d'une matrice triangulaire étant le produit des éléments diagonaux et P étant une matrice de transposition (donc de déterminant -1), on en déduit que $\det(A) = 146$.

Exercice 2 (Matrice à diagonale dominante (4 points)). Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients complexes.

1. On dit que A est à *diagonale strictement dominante* si pour tout $i = 1 : n$, on a

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.

2. Que pouvez-vous dire de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution:

1. On raisonne par l'absurde. Supposons A à diagonale strictement dominante et non inversible. Il existe alors $x \neq 0$ tel que $Ax = 0$. Soit k tel que $|x_k| = \max_{i=1:n} |x_i|$. On a alors

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0 \quad \text{et donc} \quad a_{kk}x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j.$$

On en déduit que

$$|a_{kk}x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}x_j|$$

et donc

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{|a_{kj}x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|$$

par définition de x_k . D'où la contradiction.

2. La matrice est clairement à diagonale strictement dominante donc inversible.

Exercice 3 (Monte Carlo (3 points)). Calculer la loi de la variable aléatoire X simulée par l'algorithme suivant (la valeur de $p \in [0, 1]$ et la fonction rand étant données).

$X = 0$

Faire

$U = \text{rand}(1)$

$X = X + 1$

Tant que ($U < p$)

Retourner X

Donner l'espérance de cette variable X .

Indication : vous pourrez calculer la probabilité $P(X = n)$ en fonction de p et de n .

Solution: On note $(U_i)_{i \geq 1}$ les variables aléatoires associées aux appels de la fonction rand. On a

$$p(X = n) = P((U_1 < p) \text{ et } (U_2 < p) \text{ et } \dots \text{ et } (U_{n-1} < p) \text{ et } (U_n \geq p)).$$

Les variables U_i étant indépendantes et comme elles sont de loi uniforme, on en déduit

$$p(X = n) = p^{n-1}(1 - p).$$

La variable X suit donc une loi géométrique de paramètre $1 - p$. D'après le cours, $E[X] = 1/(1 - p)$.

Exercice 4 (Calcul (4 points)). **1.** Par la méthode d'évaluation – interpolation, calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 2.** Déterminer le nombre de racines réelles de $P = x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 9$, puis le nombre de racines strictement positives et le nombre de racines strictement négatives.
- 3.** Calculer le discriminant de $Q = x^3 + 4x^2 - x + 8$. En déduire que Q a une racine multiple modulo 19 mais que des racines simples modulo 5.

Solution:

- 1.** La matrice est de taille 4, son polynôme caractéristique peut se calculer en interpolant ses valeurs en 5 points : c'est-à-dire en 0, 1, 2, 3 et 4.

$$\begin{aligned} \det M &= 4 & \det(M - \text{Id}) &= 0 & \det(M - 2\text{Id}) &= 4 \\ \det(M - 3\text{Id}) &= 1 & \det(M - 4\text{Id}) &= 0. \end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda - 1$.

- 2.** Par la méthode de Sturm, on a $P_0 = P$, $P_1 = P' = 4x^3 + 12x^2 + 12x$, $P_2 = -\text{rem}(P_0, P_1) = 3x + 9$, $P_3 = -\text{rem}(P_1, P_2) = 36$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_3 = 36$ donc aucun changement de signe.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_0 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} P_2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_3 = 36$ donc deux changements de signe. D'où deux racines réelles.

On a $P_0(0) = -9$, $P_1(0) = 0$, $P_2(0) = 9$, $P_3(0) = 36$ donc un changement de signe. Par conséquent, une racine strictement positive puisque non nulle et une racine strictement négative.

- 3.** $Q' = 3x^2 + 8x - 1$. La matrice de Sylvester de Q et Q' est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

dont le déterminant est 4332. Or $4332 = 12 * 19^2$ donc le discriminant de Q est nul modulo 19 et Q a une racine multiple. En revanche, le discriminant est non nul modulo 5 donc Q n'y a que des racines simples.

Exercice 5 (Complexité (4 points)). Soient p_1, \dots, p_n , n nombres premiers tels que $p_1 < \dots < p_n$. Le but de l'exercice est d'interpoler un polynôme F de degré au plus d modulo $p_1 \cdots p_n$ avec $d < p_1$.

Soient $x_0, \dots, x_d \in \{0, \dots, p_1 - 1\}$ tous distincts. Pour tout j , soient $a_{0,j}, \dots, a_{d,j}$ tels que

$$\forall i, F(x_i) = a_{i,j} \pmod{p_j}.$$

- 1.** Donner la complexité pour calculer F_{p_j} l'unique polynôme de degré au plus d à coefficients dans $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i, F_{p_j}(x_i) = a_{i,j} \pmod{p_j}.$$

2. On note $f_{p_i,k}$ le coefficient de F_{p_i} de degré k . Donner la complexité pour calculer $f_k \in \mathbb{Z}/p_1 \cdots p_n \mathbb{Z}$ tel que $\forall i, f_k = f_{p_i,k} \pmod{p_i}$.
3. Justifier que le polynôme $F(x) = f_d x^d + \cdots + f_0$ est solution du problème.
4. Donner la complexité globale pour calculer F .

Solution:

1. L'interpolation de Lagrange d'un polynôme de degré au plus d se fait en $O(d^2)$ opérations.
2. La complexité de la remontée de chaque f_k dans $\mathbb{Z}/p_1 \cdots p_n \mathbb{Z}$ se fait en $O(n^2)$.
3. Par construction $\forall i, j, F(x_i) \pmod{p_j} = F_{p_j}(x_i) \pmod{p_j} = a_{i,j} \pmod{p_j}$ et F est de degré au plus d .
4. Dans la première question, on a n polynômes à interpoler donc la complexité est $O(nd^2)$. Dans la seconde question, on a $d + 1$ coefficients à remonter donc la complexité est $O(dn^2)$ d'où un coût global de $O(nd^2 + dn^2)$ opérations sur les entiers.