UE MODEL – Master d'Informatique
Exercices – Semaine 2

1 Exercices simples

Exercices calculatoires (Systèmes linéaires). Résoudre les systèmes d'équations linéaires ci-dessous:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 5 \\ 2x-y-z+t & = & 4 \\ 3x+y+z-t & = & 1 \\ x+y-t+z & = & -1 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-t-z & = & -1 \\ 3x-2y-z+t & = & 1 \\ x-2y-3-2t & = & 2 \\ x-y-z-t & = & 3 \end{array}\right.$$

De manière générale, vous devez vous exercer de sorte que résoudre un système linéaire de taille raisonnable ne vous pose **aucun** problème.

Maintenant, résoudre ces mêmes systèmes dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ puis $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$. Que constatez-vous?

2 Exercices moins simples

Extensions de l'algorithme d'Euclide au cas des polynômes. On considère l'ensemble des polynômes en une variable dans un corps $\mathbb{K}$; il sera noté $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que doté des opérations d'addition et de multiplication sur les polynômes il s'agit d'un anneau.

2. Écrire les algorithmes d'addition et de multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ et faire une analyse de complexité.

3. Généraliser l'algorithme de division euclidienne au cas de couples de polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. Faire une analyse de complexité.

4. Généraliser l'algorithme d'Euclide au cas de couples de polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. Faire une analyse de complexité.

Preuve de quelques propriétés élémentaires. On se donne E et F deux espaces vectoriels.

1. Soit B_1 et B_2 deux bases de E; on suppose que B_1 est de cardinalité d. Démontrer que B_2 est de cardinalité d.

2. Soit $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Démontrer que si E est de dimension d alors F est de dimension d.

3. Démontrer que $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels.

Algorithme de décomposition LU. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ telle que $a_{1,1} \neq 0$.

1. Montrer l'égalité suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline c & A_{1,1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \dfrac{c}{a_{1,1}} & I_{n-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline 0 & A_{1,1} - \dfrac{c \cdot \ell}{a_{1,1}} \end{array}\right)$$

   o c et ℓ sont, respectivement, la première colonne et la première ligne de A privées de leur élément commun, $A_{1,1}$ représentant la sous-matrice de A restante.

2. Supposons que la matrice $A_{1,1} - c \cdot \ell / a_{1,1} = L' \cdot U'$ (où U' est une matrice triangulaire supérieure et L' est triangulaire inférieure). Montrer que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline c & A_{1,1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \dfrac{c}{a_{1,1}} & L' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline 0 & U' \end{array}\right)$$

3. En déduire un algorithme qui décompose une matrice inversible A de taille $n \times n$ sous sa forme LU. Quel problème peut apparatre ?

4. Adapter l'algorithme de la question précédente pour faire la décomposition en place et donner le pseudo-code.

3 Exercices pour Travaux sur Machines Encadrés

1. Implantez l'algorithme d'élimination de Gauss; testez-le et comparez avec les fonctionnalités fournies par Maple.

2. Implantez une fonction de résolution des systèmes linéaires s'appuyant sur l'algorithme de Gauss pour se ramener à la résolution de systèmes triangulaires.

3. Implantez une fonction de calcul de déterminants de matrices carrées et utilisez-la pour obtenir une autre fonction de résolution de systèmes linéaires. Comparez et expliquez les résultats obtenus.