UE MODEL – Master d'Informatique
Exercices – Semaine 3

1 Exercices simples

Exercices calculatoires (Euclide et polynômes). Calculer les PGCD des couples de polynômes

$$A = x^4 - 10\,x^3 + 35\,x^2 - 50\,x + 24, \quad B = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$$

et

$$A = A = x^4 - \,x^3 + 3\,x^2 - 5\,x + 2, \quad B = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Exercices calculatoires (Interpolation de Lagrange). Calculer un polynôme f de degré ≤ 3 tel que

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 1, f(3) = 2.$$

Vous utiliserez les deux techniques vues en cours.

2 Exercices moins simples

Preuve de quelques propriétés élémentaires. On se donne E et F deux espaces vectoriels.

1. Soit B_1 et B_2 deux bases de E; on suppose que B_1 est de cardinalité d. Démontrer que B_2 est de cardinalité d.
2. Soit $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Démontrer que si E est de dimension d alors F est de dimension d.
3. Démontrer que $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels. Faites de même pour les sous-espaces propres.

Algorithme de décomposition LU. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ telle que $a_{1,1} \neq 0$.

1. Montrer l'égalité suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline & \\ c & A_{1,1} \\ & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline & \\ \dfrac{c}{a_{1,1}} & I_{n-1} \\ & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline & \\ 0 & A_{1,1} - \dfrac{c \cdot \ell}{a_{1,1}} \\ & \end{array}\right)$$

   o c et ℓ sont, respectivement, la première colonne et la première ligne de A privées de leur élément commun, $A_{1,1}$ représentant la sous-matrice de A restante.

2. Supposons que la matrice $A_{1,1} - c \cdot \ell / a_{1,1} = L' \cdot U'$ (où U' est une matrice triangulaire supérieure et L' est triangulaire inférieure). Montrer que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline & \\ c & A_{1,1} \\ & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline & \\ \dfrac{c}{a_{1,1}} & L' \\ & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & \ell \\ \hline & \\ 0 & U' \\ & \end{array}\right)$$

3. En déduire un algorithme qui décompose une matrice inversible A de taille $n \times n$ sous sa forme LU. Quel problème peut apparatre ?

4. Adapter l'algorithme de la question précédente pour faire la décomposition en place et donner le pseudo-code.

5. Appliquer ces techniques à un problème d'inversion de matrices. Quelle est la complexité obtenue?

3 Exercices pour Travaux sur Machines Encadrés

1. Terminer votre implantation de l'algorithme de Gauss

2. Implanter une fonction effectuant l'interpolation de polynômes

3. Implanter une fonction effectuant le calcul de polynômes caractéristiques de matrices carrées.