

**TD 4 : INTERPOLATION DE LAGRANGE ET POLYNÔME
CARACTÉRISTIQUE**

Exercice 1. 1. Déterminer tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$\begin{cases} P(-2) = -2 \\ P(-1) = -1 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} Q(-2) = -2 \\ Q(-1) = -1 \\ Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(2) = 3. \end{cases}$$

2. Faire le même calcul dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il ?
3. Déterminer tous les polynômes $R \in \mathbb{Q}(X)[Y]$ tels que

$$\begin{cases} R(0) = X^4 \\ R(X^2) = 0 \\ R\left(\frac{1}{X^2}\right) = \frac{1-X^6}{X^2} \end{cases}$$

Exercice 2. Soit A une matrice carrée de taille n et P_A son polynôme caractéristique. Déterminer le coefficient constant et le coefficient de λ^{n-1} de P_A .

Exercice 3. 1. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a. Déterminer ses valeurs propres par la méthode du pivot de Gauss puis par celle de l'interpolation.
b. Mêmes calculs, en considérant que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Que faire ?
2. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q}(X))$,

$$B = \begin{pmatrix} X & 1 & 0 \\ 1 & X & 1 \\ 0 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

- a. Déterminer ses valeurs propres par la méthode du pivot de Gauss puis par celle de l'interpolation.
b. Quelle serait la complexité de ces algorithmes pour les matrices

$$B = \begin{pmatrix} X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & X \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Algorithme de LEVERRIER). Soit M une matrice carrée. On définit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$M_0 = M, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_{k+1} = M \left(M_k - \frac{1}{k+1} \operatorname{tr}(M_k) \operatorname{Id} \right).$$

On admet que le polynôme caractéristique de M est

$$P_M(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \operatorname{tr}(M_{k-1}) \lambda^{n-k} \right).$$

Quelle est la complexité de cet algorithme ?