Université Pierre-et-Marie-Curie | Année 2012 – 2013
LI115 | Automne

TD 5 : MATRICE DE SYLVESTER ET SUITE DE STURM

Exercice 1. Prouver que la dernière ligne non nulle de la triangularisation de la transposée de la matrice de Sylvester de P et de Q est un pgcd de P et de Q.

Exercice 2. En utilisant le fait que la matrice de Sylvester est très structurée, donner une complexité fine du calcul du résultant de deux polynômes en fonction des degrés des deux polynômes.

Exercice 3. Déterminer tous les $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg A < 3$, $\deg B < 2$ et

$$A(X^2 + 3X + 2) + B(X^3 + X^2 + X + 1) = 0,$$

puis $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg U < 3$, $\deg V < 2$ et

$$U(X^2 + 3X + 2) + V(X^3 + X^2 + X + 1) = X + 1.$$

Exercice 4. Déterminer le nombre de racines réelles de

1. $X^4 + 2X^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$;
2. $X^4 - 2X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$;
3. $X^3 - 2X^2 + X$ sur $]\frac{1}{2}; 2[$.

Exercice 5. Soit P un polynôme réel non nul sans carré. On suppose que toutes les racines de P sont inférieures en module à un réel A (par exemple la borne de Cauchy).

Donner un algorithme pour déterminer la plus grande racine positive de P à ε près.

Exercice 6. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X, Y]$. Donner la complexité du calcul du résultant de P et Q, vu comme des polynômes en Y, par la méthode d'évaluation – interpolation.

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} X^3 - Y^2 &= 0 \\ X^2 + Y &= 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 - Y &= 0 \\ X^2 + Y^2 - 1 &= 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^4 + X^2 - Y^2 &= 0 \\ X^2 + Y^2 &= 0, \end{cases}$$