Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

TD-TME n°6 - MATLAB

1. TD

Exercice 1 (Matrices de permutation et décomposition LUP)**.** On appelle matrice de permutation P_σ associé à la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la matrice définie par

$$(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la permutation σ est une transposition, alors on parle de matrice de transposition.

1. Soit P une matrice de permutation. Montrer que P est inversible et donner son inverse.

2. Soit P et Q deux matrices de permutation de même taille. Montrer que le produit PQ est une matrice de permutation que vous exhiberez.

3. Soit P une matrice de permutation de taille $n \times n$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

est une matrice de permutation de taille $(n+1) \times (n+1)$.

Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$. La réduction de Gauss peut être vue de manière récursive en considérant successivement des matrices de taille décrémentée. Soit P la matrice de transposition (échangeant la ligne 1 avec la ligne k) qui, une fois appliquée à A, fait que le premier pivot soit non nul. Alors nous avons la première réduction de Gauss :

$$PA = \begin{pmatrix} a_{k,1} & l \\ c & (PA)_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a_{k,1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,1} & l \\ 0 & (PA)_{1,1} - c \cdot l/a_{k,1} \end{pmatrix}$$

où c et l sont, respectivement, la première colonne et la première ligne de PA privées de leur élément commun, $(PA)_{1,1}$ représentant la sous matrice de PA restant. La réduction totale de A est alors obtenue en appliquant récursivement cette formule sur la matrice $A' = (PA)_{1,1} - c \cdot l/a_{k,1}$ de taille $(n-1) \times (n-1)$.

4. Montrer par récurrence sur n que toute matrice A inversible de taille $n \times n$ admet une décomposition de la forme

$$PA = LU$$

où P est une matrice de permutation, L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure.
Indication : considérer le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a_{k,1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,1} & l \\ 0 & (PA)_{1,1} - c \cdot l/a_{k,1} \end{pmatrix}$$

où P' est une matrice de permutation de taille $(n-1) \times (n-1)$.

5. En déduire un algorithme qui décompose en place une matrice inversible A de taille $n \times n$ sous sa forme LU (en utilisant la stratégie du pivot partiel) et renvoie la matrice de permutation P correspondant sous la forme d'un vecteur s d'entiers de taille n.

6. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Montrer que

$$A^T B^T = (BA)^T.$$

7. Déduire de la question précédente qu'une matrice A inversible peut être décomposée sous la forme

$$A = LUP$$

où L est une matrice triangulaire inférieure, U une matrice triangulaire supérieure et P une matrice de permutation.

Exercice 2 (Résolution d'un système linéaire)**.** Résoudre le système à coefficients dans $\mathbb{Q}$ suivant en utilisant une décomposition LUP,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Calcul de déterminant)**.** Le déterminant d'une matrice carrée A de taille $n \times n$ est un invariant très important car il permet d'obtenir beaucoup d'informations sur la nature de A. Soit σ une permutation de S_n, on appelle signature de σ, notée $\epsilon(\sigma)$, l'entier $(-1)^k$ où k est le nombre de couple (i, j) vérifiant $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le déterminant de $A = (a_{i,j})$, noté $\det(A)$, est défini de la manière suivante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Notez que la complexité de cette formule est telle qu'il ne faut absolument pas l'utiliser en pratique !

1. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Montrer que $\det(A^T) = \det(A)$. On peut aussi montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

2. En utilisant une décomposition LUP d'une matrice carrée, donner une formule permettant de calculer le déterminant à l'aide (uniquement) des *pivots* et du *nombre de matrices de transposition* composant P.

3. Déduire de la question précédente une majoration de la complexité du calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille $n \times n$.

2. TME

Exercice 4 (Un ordinateur compte mal !)**.** Que doit normalement afficher le programme suivant ?

```
format long e;
x = 4;
for i=1:100
    x=sqrt(x);
end
for i=1:100
    x = x^2;
end
disp(x);
```

Éxecuter le programme sur l'ordinateur. Quel est le résultat affiché ? Expliquez.

Exercice 5 (Utilisation des BLAS)**. 1.** Soit A une matrice de taille $m \times n$. Écrire un programme MATLAB « orienté colonne » calculant

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

pour $i = 1, 2, \ldots, m$. Utiliser ensuite les BLAS (via la commande `norm`) pour calculer les s_i. Comparer l'efficacité de ces deux algorithmes.

2. Étant données 2 matrices A et B de taille $n \times n$. Écrire un programme qui calcule AB. Comparer l'efficacité de votre programme avec la commande `A*B`.

Exercice 6 (Implantation de la décomposition LU)**. 1.** Implanter la décomposition LUP d'une matrice carrée en utilisant la stratégie du pivot partiel.

2. Tester votre implantation sur des exemples concrets.

3. Comparer votre implantation avec celle de MATLAB (commande `lu`)

Remarque : pour les mesures de temps, vous utiliserez les commandes `tic` et `toc` de MATLAB :

```
tic;
programme;
toc
```