

*Seuls les documents de cours sont autorisés - Durée 2 heures*

Le sujet se décompose en 5 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

**Exercice 1** (Décomposition LUP). Soit la matrice  $A$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Donner la décomposition LUP de la matrice  $A$ .  
Vous ferez du pivotage partiel, c'est-à-dire que vous prendrez à chaque fois comme pivot le nombre ayant la plus grande valeur absolue dans la colonne considérée.
- En déduire la valeur du déterminant de  $A$ .

**Exercice 2** (Décomposition de Choleski). Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive de taille  $n$ . Notons  $A = LL^T$  sa décomposition de Choleski ( $L$  étant triangulaire inférieure).

- Pour  $n = 3$ , écrire  $a_{ij}$  pour  $i, j = 1, 2, 3$  en fonction des coefficients de  $L$
- Remarquer que si l'on calcule colonne par colonne, on peut alors calculer dans l'ordre  $l_{11}, l_{21}, l_{31}, l_{22}, l_{32}$  et  $l_{33}$ . En déduire une fonction MATLAB calculant la décomposition de Choleski pour toute valeur de  $n$ .
- Donner la décomposition de Choleski de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3** (Transformation de Householder). Il s'agit ici d'étudier une autre méthode pour effectuer une décomposition QR.

- Soit  $z$  un vecteur de longueur  $n$  avec pour première coordonnée  $z_1 = \zeta e^{i\theta}$ . Posons  $v = z - \alpha e_1$  avec  $\alpha = -e^{i\theta} \|z\|$  et  $u = v / \|v\|$ . Définissons

$$Q = I - 2uu^*.$$

Montrer que  $Q$  est unitaire et que  $Qz = \alpha e_1$ . La matrice  $Q$  est une transformation de Householder.

- Étant donné une matrice  $A$  de taille  $m \times n$ , on sait, d'après la question précédente, déterminer une transformation de Householder  $Q_1$  telle que  $A_1 = Q_1 A$  n'ait que des zéros sous la diagonale de sa première colonne. Expliquer comment déterminer une matrice  $Q_2$  sous la forme

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - 2u_2 u_2^* \end{pmatrix}$$

afin que  $A_2 = Q_2 A_1$  ait des zéros sur la première et la deuxième colonne sous la diagonale.

3. En itérant le procédé, écrire un algorithme réduisant une matrice  $A$  sous forme triangulaire supérieure en multipliant par une série de matrices de Householder.
4. Donner la complexité en nombre de multiplications de votre algorithme.

**Exercice 4** (Multiplication de polynômes par la FFT). On veut multiplier les deux polynômes  $1 + x + 2x^2$  et  $2 + 3x$  via la FFT. Trouver une puissance de 2 appropriée, trouver la FFT des 2 suites, multiplier le résultat composante par composante et calculer la FFT inverse pour obtenir le résultat.

**Exercice 5** (Générateur aléatoire). 1. Écrire une fonction MATLAB qui génère un nombre aléatoire dans  $\{0, 1, 2\}$  vérifiant :

- la probabilité que ce nombre soit 0 est 0,2,
- la probabilité que ce nombre soit 1 est 0,3.
- la probabilité que ce nombre soit 2 est 0,5.

Vous utiliserez la fonction `rand` qui génère un nombre aléatoire uniformément distribué dans  $[0, 1]$ .

2. Soit le programme MATLAB suivant :

```
mu = 10;  
U = rand(1);  
X = -log(U)*mu
```

Donner la loi de la variable  $X$ . Vous donnerez en particulier la densité de la loi de  $X$ . Vous veillerez à justifier rigoureusement vos réponses.