Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

Examen réparti n°2 du 17 décembre 2009

Documents de cours et de TD autorisés - Durée 2 heures

Le sujet se décompose en 7 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

Exercice 1 (Décomposition LU)**.** Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition LU de la matrice A.

2. En déduire la solution du système $Ax = b$ avec

$$b = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Décomposition QR)**.** Calculer la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant

1. les rotations de Givens ;

2. l'algorithme de Gram–Schmidt.

Exercice 3 (FFT modulaire)**.** Dans cet exercice, nous souhaitons utiliser la FFT dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, c'est-à-dire modulo 7.

1. Il existe un nombre ω tel que $\omega^6 = 1$ et $\omega^i \neq 1$ pour $i = 1, \ldots, 5$. Trouver un tel ω et montrer que $\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^6 = 0$.

2. Calculer la FFT du vecteur $(0, 1, 1, 1, 5, 2)$ modulo 7. Dans les calculs, toutes les opérations doivent être faites modulo 7.

3. Donner la matrice permettant d'effectuer la FFT inverse. Là encore, toutes les opérations doivent être faites modulo 7.

4. Montrer comment l'on peut multiplier les polynômes $x^2 + x + 1$ et $x^3 + 2x - 1$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ en utilisant la FFT modulaire.

Exercice 4 (Code correcteur d'erreurs)**.** On considère le code $\mathscr{C}$ binaire dont la matrice génératrice est

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Donner tous les mots de $\mathscr{C}$
2. Donner la distance minimale de $\mathscr{C}$. Combien d'erreurs peut-on corriger ? Combien d'erreurs peut-on détecter ?
3. Donner une matrice de contrôle pour ce code.
4. Donner le syndrome du mot $(1,1,0,1,1)$. Ce mot appartient-il au code ?

Exercice 5 (Monte Carlo)**.** Calculer la loi de la variable aléatoire X simulée par l'algorithme suivant (la valeur de p et la fonction `rand` étant donnés).

```
X = 0
Faire
    U = rand(1)
    X = X + 1
Tant que (U < p)
Retourner X
```

Indication : vous pourrez calculer la probabilité $P(X = n)$ en fonction de p et de n.

Exercice 6 (Méthode de Newton)**. 1.** Proposer un algorithme pour calculer une approximation de $1/\sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

2. Quelle est la différence remarquable avec la formule pour calculer $\sqrt{a}$.

Exercice 7 (Anneaux-quotients)**. 1.** Décrire l'anneau-quotient $\mathbb{Q}[X,Y]/\langle X-1, Y-1\rangle$. Est-il de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?

2. La variété associée à $\langle X-1, Y-1\rangle$ est-elle de dimension 0 ? Si oui, combien a-t'elle de solutions ?