

1. TD

Exercice 1 (Givens complexe). Étant donné un vecteur z de longueur 2 à coefficients complexes et $c = z_1 / \|z\|_2$. Déterminer s dans la matrice

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & c \end{pmatrix}$$

tel que G soit unitaire et que $Gz = \|z\|e_1$ avec $e_1 = (1, 0)^T$.

Exercice 2 (Transformation de Householder). Il s'agit ici d'étudier une autre méthode pour effectuer une décomposition QR.

1. Soit z un vecteur de longueur n avec pour première coordonnée $z_1 = \zeta e^{i\theta}$. Posons $v = z - \alpha e_1$ avec $\alpha = -e^{i\theta}\|z\|$ et $u = v/\|v\|$. Définissons

$$Q = I - 2uu^*.$$

Montrer que Q est unitaire et que $Qz = \alpha e_1$. La matrice Q est une transformation de Householder.

2. Étant donné une matrice A de taille $m \times n$, on sait, d'après la question précédente, déterminer une transformation de Householder Q_1 telle que $A_1 = Q_1 A$ n'ait que des zéros sous la diagonale de sa première colonne. Expliquer comment déterminer une matrice Q_2 sous la forme

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - 2u_2u_2^* \end{pmatrix}$$

afin que $A_2 = Q_2 A_1$ ait des zéros sur la première et la deuxième colonne sous la diagonale.

3. En itérant le procédé, écrire un algorithme réduisant une matrice A sous forme triangulaire supérieure en multipliant par une série de matrices de Householder.
4. Donner la complexité en nombre de multiplications de votre algorithme.

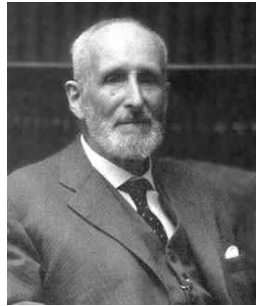
Exercice 3 (Quelques propriétés de la SVD). Soit $A = U\Sigma V^T$ la SVD d'une matrice A de taille $m \times n$ avec $m \geq n$.

1. Montrer que si A est de rang plein, alors la solution de $\min_x \|Ax - b\|_2$ est $x = V\Sigma^{-1}U^T b$.
2. Montrer que $\|A\|_2 = \sigma_1$ et que si A est une matrice carré inversible alors $\|A^{-1}\|_2^{-1} = \sigma_n$ et que $\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1/\sigma_n$
3. Écrivons $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ et $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ afin que $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$. Montrer qu'une matrice de rang $k < n$ la plus proche de A est $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ et que $\|A - A_k\| = \sigma_{k+1}$.

Exercice 4 (Théorie de Perron-Frobenius). On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est *positif* et on note $x \geq 0$ si toutes ses coordonnées sont positives. On dit qu'il est *strictement positive* et on note $x > 0$ si toutes ses coordonnées sont strictement positive. On dit de même pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qu'elle est positive (resp. strictement positive) si ses coefficients le sont ; on note à nouveau $A \geq 0$ (resp. $A > 0$). Plus généralement, on a la relation d'ordre $x \leq y$ si $y - x \geq 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ (de même pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$), on note $|x|$ le vecteur positif dont les coordonnées sont les nombres $|x_j|$.

1. Montrer que $|Ax| \leq |A||x|$.
2. Montrer qu'une matrice A est positive si et seulement si $x \geq 0$ implique $Ax \geq 0$.
3. Soit A une matrice positive. Montrer que $\rho(A)$ est une valeur propre de A associé à un vecteur propre positif.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Brouwer : toute fonction continue d'un convexe compact dans lui-même admet un point fixe.



Oskar Perron (1880-1975)



Georg Frobenius (1849-1917)

Exercice 5 (Matrices stochastiques). Une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positive est dite *stochastique* si la somme de chaque ligne est égale à 1 :

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de P . Donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.
2. Montrer que $\rho(P) = 1$.

Exercice 6 (Méthode de la puissance). Le but de cet exercice est d'étudier un algorithme calculant la plus grande valeur propre d'une matrice ainsi qu'un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$i = 0$

répéter

$$y_{i+1} = Ax_i$$

$$x_{i+1} = y_{i+1} / \|y_{i+1}\|$$

$$\tilde{\lambda}_{i+1} = x_{i+1}^T Ax_{i+1}$$

$$i = i + 1$$

jusqu'à convergence

1. Montrer que si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ alors x_i converge vers e_1 et $\tilde{\lambda}_i$ converge vers λ_1 .
2. On suppose maintenant que $A = SAS^{-1}$ est diagonalisable avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Montrer que x_i converge vers s_1 (la première colonne de S) et que $\tilde{\lambda}_i$ converge vers λ_1 .

2. TME

Exercice 7 (Compression d'images via la SVD). La figure 1 représente une image de 320×200 pixels correspondante à une matrice X de taille 320×200 .

L'affiche de l'image en MATLAB se fait de la façon suivante :

```
load clown.mat;
colormap('gray');
image(X);
```

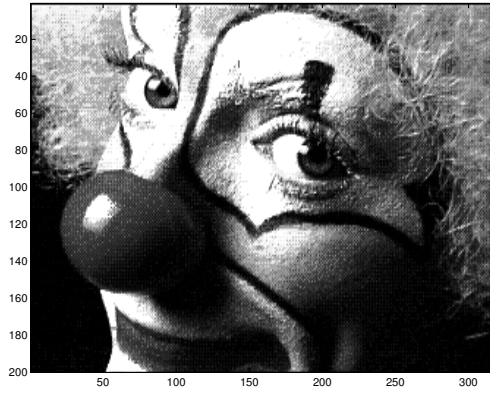


FIG. 1 – Image de taille 320×200 pixels

1. En utilisant la question 3 de l'exercice 3, proposer un algorithme de compression d'image. Tester votre algorithme sur la figure 1.
2. Proposer un taux de compression permettant de mesurer la qualité de compression des images.

Exercice 8 (Défloutage d'images via la SVD). Le but de cet exercice est de déflouter l'image 2. Il s'agit d'un exemple de *problème inverse linéaire*. Étant donné une image floutée et un modèle linéaire de floutage, on veut reconstruire l'image originale. La figure 2 représente une image floutée.

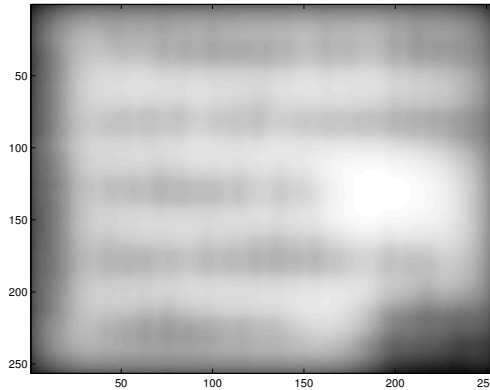


FIG. 2 – Image floutée de taille 250×250 pixels

Soit G une image floutée (G est une matrice). On cherche à reconstruire l'image originale F (F est une matrice). On va utiliser la notation suivante qui transforme une matrice X en un vecteur $x = \text{vec}(X)$ qui n'est autre que le vecteur obtenu en empilant les colonnes de X . Notons donc $g = \text{vec}(G)$ et $f = \text{vec}(F)$. Le floutage se fait par le modèle $g = Kf + \eta$ où K est une matrice (le modèle de floutage) et η un bruit (ou les erreurs de mesure). On connaît donc K et g . Pour retrouver f , on cherche à résoudre le problème

$$\min_f \|g - Kf\|_2^2 \quad (1)$$

Le produit de Kronecker $A \otimes B$ où A est une matrice $m \times m$ est défini par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la solution de l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$f^* = V\Sigma^{-1}U^T g = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T g}{\sigma_i} v_i,$$

où $K = U\Sigma V^T$, u_i est la i -ième colonne de U et v_i la i -ième colonne de V . En fait, on peut ne regarder que le résultat tronqué, c'est à dire,

$$f_p^* = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^T g}{\sigma_i} v_i$$

avec $p < n$.

Posons $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ et $B = U_B \Sigma_B V_B^T$ les SVD respectives de A et de B . On peut montrer que $A \otimes B = (U_A \otimes U_B)(\Sigma_A \otimes \Sigma_B)(V_A \otimes V_B)$ et que l'on a aussi

$$F = B^{-1}GA^{-T} = V_B \Sigma_B^{-1} U_B^T G U_A \Sigma_A^{-1} V_A^T.$$

Si on note $\hat{G} = U_B^T B U_A$, on a

$$\Sigma_B^{-1} \hat{G} \Sigma_A^{-1} = \hat{G} / S$$

avec $S = \text{diag}(\Sigma_B) \text{diag}(\Sigma_A)^T$.

2. Écrire un programme MATLAB qui prend en entrées A , B et G et calcule F . Vous testerez votre programme avec différentes valeurs de p afin d'obtenir l'image la plus nette possible. Les matrices A , B et G se trouve dans le fichier `defloutage.mat`¹. Il faut le charger en tapant

```
load defloutage.mat;
colormap('gray');
image(G);
```

Pour en savoir plus, voir par exemple :

– Per Christian Hansen, James G. Nagy et Dianne P. O'Leary, *Deblurring Images : Matrices, Spectra, and Filtering*, SIAM, 2006

Exercice 9 (Algorithme PageRank de Google). Soit W l'ensemble des pages web que l'on peut attendre en suivant des liens à partir d'une page racine. Notons n le nombre de pages dans W . On définit la matrice de connection G de W en posant $G_{ij} = 1$ s'il y a un lien vers la page i dans la page j et $G_{ij} = 0$ sinon. Notons

$$c_j = \sum_{i=1}^n g_{ij}.$$

Il s'agit du degré sortant de la j -ième page. On définit alors la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de la façon suivante :

$$A_{ij} = \begin{cases} g_{ij}/c_j & \text{si } c_j \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que A^T est stochastique. Que pouvez-vous en déduire sur la plus grande valeur propre de A .
2. En utilisant le théorème de Perron-Frobenius, montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $Ax = x$ et $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.
3. Calculer x en utilisant la méthode de la puissance vue en TD.

Vous utiliserez le fichier `surfer.m`² pour générer la matrice G .

Pour en savoir plus, voir par exemple :

- Page L., S. Brin, R. Motwani et T. Winograd. « The PageRank citation ranking : Bringing order to the web », rapport technique, Stanford University, 1998.
- Langville, A.M. et C.D. Meyer. *Google's PageRank and Beyond : The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, 2006.

¹disponible à l'adresse <http://www-pequan.lip6.fr/~graillat/teach/model/defloutage.mat>

²disponible à l'adresse <http://www-pequan.lip6.fr/~graillat/teach/model/surfer.m>