Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

TD-TME n°4 - Méthode Monte Carlo

1. TD

Exercice 1 (Des cartes !). On suppose que l'on a un jeu de 8 cartes numérotées de 1 à 8 et 2 cartes portant chacune le numéro 10. On tire une carte au hasard et on note X le numéro de la carte tirée. Donner la moyenne et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 2 (Densités). **1.** Vérifier que $f(x) = 3x^2$ est bien une densité de probabilité sur $[0,1]$.

2. Calculer la moyenne et la variance.

Exercice 3 (Générateur). Écriver une fonction MATLAB qui génére un nombre aléatoire vérifiant :
– la probabilité que ce nombre soit 0 est 0,6,
– la probabilité que ce nombre soit 1 est 0,4.
Vous utiliserez la fonction `rand` qui génère un nombre aléatoire uniformé distribué dans $[0,1]$.

Exercice 4 (L'aiguille de Buffon). George Louis Leclerc, comte de Buffon, a proposé le problème suivant : si une aiguille de longueur l est jetée au hasard au millieu d'une surface sur laquelle sont tracées des lignes parallèles espacées de $d > l$, quelle est la probabilitée que l'aiguille croise une des lignes ?

1. Répondez à la question précédente.

2. Si nous jetons l'aiguille n fois, combien de croisement devrions-nous observer ?

3. En utilisant ce résultat, proposez un algorithme de Monte Carlo pour le calcul de la constante π.

Exercice 5 (Paradoxe des anniversaires). Combien faut-il de personnes dans une salle pour qu'il y ait 50% de chance que deux personnes soient nées le même jour de l'année ?

2. TME

Exercice 6 (Calcul approché de π). On veut estimer la valeur de π en utilisant un ensemble de points aléatoires dans un carré unitaire.

1. Trouvez une condition qu'un point aléatoire satisfait avec une probabilité $\pi/4$.

2. Écrivez un algorithme qui calcule la valeur de π.

Exercice 7 (Volume de la boule). Écriver un programme MATLAB qui estime le volume de la boule dans $\mathbb{B}_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$ en utilisant une méthode de Monte Carlo. Estimer ensuite le volume de la boule $\mathbb{B}_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 8 (Calcul du prix des options par la méthode de Monte Carlo). Une *option* est un contrat qui donne le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (ou de vendre) à l'échéance T une unité de l'actif risqué (par exemple une action), à un prix K fixé à l'avance. Le but de ce contrat est de couvrir son acquéreur vis à vis de fluctuations à la hausse (ou à la baisse) de cet actif risqué, entre l'instant présent $t = 0$ et

l'échéance $t = T$. L'acquéreur de cette option doit payer une prime C au moment de la signature du contrat.
On distingue en général deux types d'option : le *call* et le *put*. Le call est une option d'achat. À l'instant 0, l'acheteur d'un call achète à un prix C, le droit d'acheter à l'instant T, une action donnée à un prix K fixé, et ce quel que soit le prix de l'action à l'instant T.
Notons (S_t) le prix (aléatoire) de l'action considérée à l'instant t. Si $S_T > K$, alors le détenteur du call exerce son droit, et achète l'action au prix K et la revend tout de suite au prix S_T ; son gain est alors de $(S_T-K)-C = (S_T-K)_+ - C$ si l'on note $(X)_+ = \max(0, X)$. Si, par contre, $S_T < K$, alors le détenteur n'exerce pas son droit (il n'achète pas l'action), et son gain est alors de $-C = (S_T - K)_+ - C$. Dans les deux cas, le gain est en moyenne de $E[(S_T - K)_+] - C$ où $E[\cdot]$ dénote l'espérance de la variable aléatoire. Pour que le problème soit équitable, il faut que l'espérance du gain soit nul donc que $C = E[(S_T - K)_+]$. Il reste à modéliser le prix des actions. On utilise le modèle suivant : entre les instants t_i et t_{i+1} le prix de l'action varie de

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = Y_i S_{t_i}$$

où les Y_i sont des variables iid de loi normale centrée $\mathcal{N}(0,1)$. Le théorème central limite permet de déduire que $S_T \approx e^Z$ avec Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La formule précédente a été introduite par Black et Scholes ce qui leur a valu le prix Nobel d'économie.
Le *put* est une option de vente. A l'instant $t = 0$, l'acheteur achète à un prix P le droit de vendre à l'instant T une action donnée à un prix K fixé, et ce quel que soit le prix de l'action à l'instant T. Si $S_T \geqslant K$, le détenteur du put n'exercice pas son droit (il ne vend pas l'action) et son gain est donc de $-P = (K - S_T) - P$. Si, par contre, $S_T < K$, il exerce mon droit, et vend l'action au prix K et la rachète au prix actuel S_T. Son gain est alors de $(K - S_T) - P = (K - S_T)_+ - P$. En moyenne, le gain sera donc de $E[(K - S_T)_+] - P$. Pour que le jeu soit équitable, il faut donc que $P = E[(K - S_T)_+]$. On supposera dans la suite que $K = 1$.

1. Calculer par une méthode de Monte Carlo les quantités $C = E[(e^G - 1)_+]$ et $P = E[(1 - e^G)_+]$ où G suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
2. On note $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$. On peut montrer que $C = e^{1/2}\Phi(1) - 1/2$ et $P = 1/2 - e^{1/2}\Phi(-1)$. Comparer avec les valeurs trouvées précédemment. On pourra utiliser la fonction `erfc`.