Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

PARIS UNIVERSITAS TD-TME n°9 - Résolution de systèmes polynomiaux et méthode de Newton

1. TD

Exercice 1 (Racine carrée)**.** Le but de cet exercice est de calculer la racine carrée d'un nombre réel.

1. Donner un algorithme de calcul de la racine carrée.

2. Montrer que l'algorithme converge bien vers la racine carrée.

3. Montrer que la convergence est quadratique.

Exercice 2 (Méthode de Newton p-adique)**.** Soit f un polynôme à coefficients entiers. Nous allons voir dans cet exercice comment remonter les solutions de f modulo un premier p en des solutions modulo p^k.

1. Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On notera f' la dérivée formelle de f. Montrer que f' est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et qu'il existe un polynôme r en deux variables et à coefficients entiers tel que :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(x,h)h^2$$

2. Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et p un premier ne divisant pas le coefficient dominant de f. Montrer que s'il existe x_1 vérifiant

$$f(x_1) = 0 \mod p \text{ et } f'(x_1) \neq 0 \mod p$$

alors il existe pour tout $k > 1$ un entier x_k tel que

$$f(x_k) = 0 \mod p^k \text{ et } x_k = x_{k-1} \mod p^{k-1}.$$

3. Déduire de la question précédente un algorithme permettant de construire une racine d'un polynôme modulo p^k ($k > 1$ un entier) à partir de son image modulo p. Étudier sa complexité.

4. Soit p un nombre premier impair. Montrer que si a est un *résidu quadratique* modulo p alors c'est un résidu quadratique modulo p^k ($k > 1$ un entier).

5. Soit $x_1 = 3$. Montrer que x_1 est une *racine simple* de $f = x^2 - 2$ vu dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$. Construire les relèvements de x_1 modulo 7^k pour $k = 2,3,4$.

2. TME

Exercice 3 (Calcul de racines de fonctions non linéaires)**. 1.** Implémenter la méthode de Newton vue en cours pour des fonctions non linéaire.

2. En déduire une solution approchée de la racine positive de l'équation $x^3 = \cos(x)$. Étudier la vitesse de convergence.

Exercice 4 (Méthode de Newton p-adique)**. 1.** Implémenter en Maple la méthode de Newton p-adique de l'exercice 2.

2. Tester votre code sur l'exemple de la question 5 de l'exercice 2.

Exercice 5 (Inverse d'une matrice)**.** On considère $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, inversible. On cherche son inverse par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(X) = A - X^{-1}$.

1. Montrer que l'itération de Newton vérifie $X_{n+1} = 2X_n - X_nAX_n$.

2. Programmer la méthode en partant de $X_0 := A^T/\mathrm{Trace}(A^TA)$. On définira l'erreur par $e_n = \|I - X_nA\|_2$.