Techniques Algorithmiques pour le Calcul Scientifique (LI364)

Partiel du 22 mars 2011

Seuls les documents de cours/TD et les notes de cours/TD sont autorisés - Durée 1 heure 45

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 3 exercices indépendants. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Il conviendra de bien détailler les étapes d'un algorithme et non pas de donner directement le résultat.

Exercice 1 (Optimisation (8 points))**.** Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer le gradient ∇f ainsi que la matrice hessienne H_f.

2. Déterminer le seul point critique $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.

3. On souhaite prouver que $\overline{x}$ est un minimum local de f.

- **a.** Vérifier que la matrice hessienne $H_f(\overline{x})$ s'écrit sous la forme $H_f(\overline{x}) = 2(I_n + J_n)$ où I_n est la matrice identité de taille n et J_n la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.
- **b.** Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- **c.** Calculer le produit de J_n par le vecteur $(1, \ldots, 1)^T$. En déduire une autre valeur propre de J_n.
- **d.** En déduire les valeurs propres de $H_f(\overline{x})$ et conclure concernant la nature du point $\overline{x}$.

Exercice 2 (FFT modulaire (6 points))**.** Dans cet exercice, nous souhaitons utiliser la FFT dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, c'est-à-dire modulo 7.

1. Il existe un nombre ω tel que $\omega^6 = 1$ et $\omega^i \neq 1$ pour $i = 1, \ldots, 5$. Trouver un tel ω et montrer que $\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^6 = 0$.

2. Calculer la FFT du vecteur $(0, 1, 1, 1, 5, 2)$ modulo 7. Dans les calculs, toutes les opérations doivent être faites modulo 7.

3. Donner la matrice permettant d'effectuer la FFT inverse. Là encore, toutes les opérations doivent être faites modulo 7.

4. Montrer comment l'on peut multiplier les polynômes $x^2 + x + 1$ et $x^3 + 2x - 1$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ en utilisant la FFT modulaire.

Exercice 3 (Disque de Gerschgorin (6 points))**.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients complexes.

1. Pour chaque indice de ligne i entre 1 et n, on introduit le disque de Gerschgorin correspondant

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}.$$

Montrer que toute valeur propre de A appartient à l'un au moins des disques de Gerschgorin.

2. En déduire que si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Gauss-Seidel converge.